Mathematik für Ingenieure I+II

ET

22.10.1999 7:30-10:30

Akad. Dir. Dr. H. Raum

Außer elektronischen Geräten sind alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen.

0,10 DM

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Man ermittle den Betrag und das Argument für jedes $a \in \mathbb{C}$ so, daß a eine Nullstelle von $Q \in \overline{\mathbb{C}}[z]$ ist. Dabei gelte für Q:

$$(z-a)Q(z) = z^3 - (a+1)z^2 + (1+a-j)z + aj - a \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

	1	$-a-1$	$1+a-j$	$aj-a$
a		a	$-a$	$-aj+a$
	1	-1	$1-j$	0

$Q(z) = z^2 - z + 1 - j$,

$Q(a) = a^2 - a + 1 - j \stackrel{!}{=} 0$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1(1-j)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3+4j}}{2}, \quad d = -3+4j.$$

$$\sqrt{d} = \sqrt{\tfrac{d}{2}(|d| + \mathrm{Re}\, d)} + j\sqrt{\tfrac{d}{2}(|d| - \mathrm{Re}\, d)} = 1+2j.$$

$$a = 1+j = \sqrt{2}\, e^{j(\pi/4)} \qquad a = -j = 1e^{-j(\pi/2)},$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Man ermittle alle $p \in \mathbb{R}$ so, daß der folgende Schnittraum im $\mathbb{R}^{4\times 1}$ eindimensional ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 5 \\ 5 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \middle| \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Schnittbedingung

*) $\quad 0\cdot d_1 + 0 d_2 = \beta_1 + \beta_2 + 1$
$\quad 0 d_1 + 1 d_2 = \beta_1 + 2\beta_2 + 2$
$\quad 1 d_1 + 2 d_2 = 5\beta_1 + 5\beta_2 + 5$
$\quad 1 d_1 + 0 d_2 = 5\beta_1 + p\beta_2 + 3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & p & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & p-5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & p-1 & 2 \end{pmatrix},$$

*) nach d_1, d_2 lösbar $\Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 + 1 = 0$, $\beta_1 + \frac{p-1}{2}\beta_2 + 1 = 0$.

Schnittraum eindimensional $\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 3$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Der lineare Operator $\mathcal{A} : X \to X$ genüge mit den Basen $\vec{V} := (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3)$ und $\vec{W} := (\vec{w}_1 | \vec{w}_2 | \vec{w}_3)$ des reellen Vektorraumes X folgenden Beziehungen:

$$\mathcal{A}(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3, \quad \mathcal{A}(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 + \vec{w}_3, \quad \mathcal{A}(\vec{v}_3) = \vec{w}_3,$$

$$\mathcal{A}(\vec{w}_1) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3, \quad \mathcal{A}(\vec{w}_2) = \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 + 3\vec{w}_3, \quad \mathcal{A}(\vec{w}_3) = \vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 6\vec{w}_3.$$

Man ermittle die Transformationsmatrix T zum Basiswechsel $\vec{W} \to \vec{V} = \vec{W}T$.

$$\mathcal{A}\vec{V} = \vec{W}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}, \quad \mathcal{A}\vec{W} = \vec{W}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{A}.$$

$$\mathcal{A}\vec{V} = \vec{W}AT, \quad \vec{W}B = \vec{W}AT$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

T

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für die Funktionen $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x)\, dx = m \cdot n + 1 \quad \forall m, n \in \{0,1,2\}.$$

Man ermittle diejenigen $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, die das folgende Funktional minimieren:

$$F(c_0, c_1) := \int_0^1 \left| c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) - f_2(x) \right|^2 dx.$$

Normalgleichungen: $f_m \bullet f_n := \int_0^1 f_m(x) f_n(x)\, dx$.

$$\begin{pmatrix} f_0 \bullet f_0 & f_1 \bullet f_0 \\ f_0 \bullet f_1 & f_1 \bullet f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \bullet f_2 \\ f_1 \bullet f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}, \quad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}},$$

$$c_0 = -1, \quad c_1 = 2.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

a) Man ermittle für jedes $t \in \mathbb{R}$ den Bildpunkt von $(1+t, 1-t)$ und den Bildpunkt von $(1-t, 1+t)$ bezüglich der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u := x + y, \quad v := x^2 y + x y^2.$$

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die in a) definierte Abbildung im Punkt $(1+t, 1-t)$ lokal umkehrbar? Für welche $t \in \mathbb{R}$ nicht?

a) $u(1\pm t, 1\mp t) = 1 \pm t + 1 \mp t = 2$

$v(1\pm t, 1\mp t) = (1\pm t)^2(1\mp t) + (1\pm t)(1\mp t)^2 = 2(1-t^2)$.

b) $\det \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy + y^2 & 2xy + x^2 \end{pmatrix} = x^2 - y^2 \mp 4t$.

Sicherlich lokal umkehrbar für $t \neq 0$.

nicht lokal umkehrbar für $t = 0$ wegen a)

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Die reellen Funktionen f_c seien mit dem Entwicklungspunkt $x := 0$ in Potenzreihen entwickelbar.

Für $x \neq 0$ gelte:

$$f_c(x) = \frac{\ln(\cosh x)}{x + \ln(1+cx) + \ln(1-cx)}.$$

Man ermittle alle $c \in \mathbb{R}$ mit $f_c'''(0) = 1$.

$x + \ln(1+cx) + \ln(1-cx) = x - c^2x^2 - \frac{1}{2}c^4x^4 + O(x^4)$.

$\ln(\cosh x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^4)\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^4) - \frac{1}{8}x^4 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^4)$.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + O(x^3)}{1 - c^2x - \frac{1}{2}c^4x^3 + O(x^3)}.$$

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{12}$

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c^2x^2 + \left(\frac{1}{2}c^4 - \frac{1}{12}\right)x^3 + O(x^3)$

$c = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei $1 + 2x + 3y$ das Taylorpolynom ersten Grades einer C^1-Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zum Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Mit der speziellen Lösung $(x, y, z) := (0,0,0)$ der nichtlinearen Gleichung

$$*) \quad g(x,y)\left(e^{2z} + 1\right) - 2e^{3z} = 0$$

wird dann eine lokale Auflösungsfunktion $z = z(x,y)$ von *) festgelegt. Man ermittle zum Entwicklungspunkt $(0,0)$ das Taylorpolynom ersten Grades dieser lokalen Auflösungsfunktion.

Aus *) folgt

$g_x\left(e^{2z}+1\right) + g e^{2z} \cdot 2 \cdot z_x - 2e^{3z} \cdot 3 \cdot z_x = 0$

$g_y\left(e^{2z}+1\right) + g e^{2z} \cdot 2 \cdot z_y - 2e^{3z} \cdot 3 \cdot z_y = 0$.

Mit $g(0,0) = 1$, $g_x(0,0) = 2$, $g_y(0,0) = 3$ und $z(0,0) = 0$ folgt dann $z_x(0,0) = 1$, $z_y = \frac{3}{2}$ und damit

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Man ermittle alle lokalen Maximalstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := 2(x+y) - x^2 - y^2$$

unter der Restriktion $x + y \leq 4$.

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 - 2x \\ 2 - 2y \end{pmatrix}$, $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ negativ definit auf $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ lokales Maximum in $(1,1)$

$h := x + y - 4$, $\nabla h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\nabla f + \mu \nabla h = \begin{pmatrix} 2 - 2x + \mu \\ 2 - 2y + \mu \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d.R.

$h = x + y - 4 = 0$

$x = 2$
$y = 2$
$\mu = 2 > 0$.