0,80 DM

Prof. Dr. W. Borchers
Erlangen, den 11. Oktober 2000

Elektrotechnik
Mathematik I + II

A1) Untersuchen Sie, ob die angegebenen Funktionen surjektiv, injektiv bzw. bijektiv sind.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 y$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x \end{pmatrix}$,

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.

(11 Punkte)

A2) Gegeben ist das parameterabhängige lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des Systems.

b) Berechnen Sie den Kern (Nullraum), das Bild sowie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von α.

(9 Punkte)

A3)

a) Berechnen Sie die (eindeutig bestimmte) komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(w) > 0$, $\mathrm{Im}(w) > 0$ und $w^4 = -w$.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -w$, wobei w die Zahl aus Teil a) ist.

Hinweis: Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.

(6 Punkte)

A4) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

b) Geben Sie eine Transformation der Matrix A auf Diagonalform an, also eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{2,2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit

$$A = TDT^{-1}.$$

c) Bestimmen Sie die Matrix

$$B = A^3 - 6A^{-1}.$$

d) Berechnen Sie die Determinanten

$$\det(A) \text{ und } \det(B).$$

(12 Punkte)

A5)

a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(i)} \lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}, \quad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x^3)}{x^2 \sin(x^4)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Regel von l'Hospital und die Taylorentwicklung.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} x^{2n}.$$

c) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

$$\text{(i)} f(x) = \sin(\cos(x))\sin(x), \qquad \text{(ii)} f(x) = x^3 \ln(x^2).$$

(15 Punkte)

A6) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ im Ursprung $(0,0)$ stetig fortsetzbar sind, und geben Sie gegebenenfalls die stetige Fortsetzung an.

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin^2(y)}{x^2+y^2}$,

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}$.

Hinweis: Schätzen Sie (in einem der Aufgabenteile) $\sin(x)$ durch x ab.

(8 Punkte)

A7) Auf dem Raum $\mathbb{P}_2$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad maximal 2 sei die Abbildung

$$(p,q) \mapsto \langle p,q\rangle_{\mathbb{P}_2} = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

definiert.

a) Handelt es sich bei $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{P}_2}$ um ein Skalarprodukt? Bitte begründen Sie ihre Aussage.

b) Für Polynome $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ gilt die Darstellung

$$\langle p,q\rangle_{\mathbb{P}_2} = \langle M\vec{a}, \vec{b}\rangle_{\mathbb{R}^3},$$

wobei $\vec{a} = (a_0,a_1,a_2)^\top$ und $\vec{b} = (b_0,b_1,b_2)^\top$ die Koeffizientenvektoren von p und q sind, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine Matrix ist. Bestimmen Sie M.

c) Ist M invertierbar? (mit Begründung)

(12 Punkte)

A8)

a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $F(x) = x^4 + \cos(x^4)$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$ bis zur Ordnung 6.

b) Wie lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2(x)$ der Funktion $h(x) = \int_0^x \arctan(t^2)\,dt$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$?

c) Bestimmen Sie eine Schranke S so, daß für $|x| < 10^{-1}$ gilt

$$|h(x) - T_2(x)| < S.$$

(9 Punkte)

A9) Betrachten Sie die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Reihe für $x > 0$ punktweise konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß die Konvergenz gleichmäßig ist auf jedem Intervall $[\delta, +\infty)$ mit $\delta > 0$. Ist die Grenzfunktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}$ stetig?

c) Differenzieren Sie die Reihe gliedweise. Zeigen Sie, daß die erhaltene Reihe die Ableitung f' von f darstellt. Leiten Sie die Formel

$$f'(x) = -\frac{e^x}{e^x - 1}$$

her.

d) Berechnen Sie durch Integration von $f'(x)$ eine Formel für $f(x)$. Bestimmen Sie dabei die Integrationskonstante, indem Sie den Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ betrachten.

(18 Punkte)