03.02.03

Mathe-Repetitorium

8 Aufgaben à 10 Punkte

ab 24 Punkte bestanden ($\hat{=}$ 30 %)

alle Hilfsmittel außer elektronische Hilfsmittel

Aufg 1 gegeben sei Kurve $K := \{(t^2, 1, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0,1]\}$

und Vektorfeld $V: K \to \mathbb{R}^3$ mit

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ x + \ln(1+z) \\ e^y \end{pmatrix}$$

Fliege andere Schreibweise ??

Man berechne das Kurvenintegral $\int_K (\operatorname{rot} V) \cdot d\mathbf{k}$

Lösung:

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{3y} - V_{2z} \\ V_{1z} - V_{3x} \\ V_{2x} - V_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y - \frac{1}{1+z} \\ 0 - 0 \\ 1 - x \end{pmatrix}$$

macht Jahn nicht :-)

$$\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow k'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schreibweise Skalarprodukt

Dann gilt mit $x = t^2, y = 1, z = t$:

$$\int_K \operatorname{rot}(V) \cdot d\mathbf{k} = \int_a^b \left(\operatorname{rot} V(k(t))\right)^T \cdot k'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(e - \frac{1}{1+t}, 0, 1-t^2\right)\begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2et - \frac{2t}{1+t} + 1 - t^2\right) dt = \int_0^1 \left(2et - 2 + \frac{2}{1+t} + 1 - t^2\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2et - 1 + \frac{2}{1+t} - t^2\right) dt = \left[et^2 - t + 2\ln(1+t) - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 =$$

$$= e - 1 + 2\ln 2 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{e - \frac{4}{3} + 2\ln 2}}$$

Übungsaufgabe (auch Klausuraufgabe)

gegeben sei die Kurve $K := \{(t, t^2, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [1,2]\}$

und das Vektorfeld $V: K \to \mathbb{R}^3$ mit

$$V(x,y,z) = \left(0, \frac{y + \sinh(x)}{x(\cosh(x) - \sinh(x))}, z^2\right)^T \quad \forall (x,y,z) \in K$$

Man bestimme das Kurvenintegral $\int_K V(k) \cdot dk$

Aufgabe 2: S sei die Oberfläche des Körpers

$G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 1, y^2 \le z \le y\}$

Berechnen Sie mit dem Vektorfeld

$V(x,y,z) := \left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^3}{3}, z\right)^T$ das Integral

$$\iint_S (V \cdot n)\, dS$$

Lösung: mit Gaußschem Integralsatz gilt

$$\iint_S (V \cdot n)\, dS = \iiint_G \operatorname{div} V \, d(x,y,z)$$

$$\boxed{\operatorname{div}(x,y,z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}}$$

$$\iiint_G (x + y^2 + 1)\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_{y^2}^{y} (x^2 + y^2 + 1)\, dz\, dx\, dy$$

äußere Grenzen müssen immer Konstante sein!!

$$= \int_0^1 \int_0^{y^2} (x + y^2 + 1) z \Big|_{z=y^2}^{z=y} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} (xy + y^3 + y - xy^2 - y^4 - y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y + x(y^3 + y - y^4 - y^2) - \frac{1}{2}x^2 y^2\right]_{x=0}^{x=y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^5 + y^5 + y^3 - y^6 - y^4 - \frac{1}{2}y^6\right) dy =$$

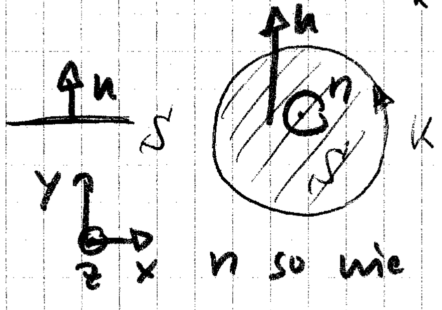
$$= \int_0^1 (1{,}5\, y^5 - 1{,}5\, y^6 + y^3 - y^4)\, dy =$$

$$= \left[-1{,}5 \cdot \frac{1}{7} y^7 + \frac{1}{4} y^6 - \frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{4} y^4\right]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\frac{3}{14} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{35}}}$$

<u>Aufgabe 3:</u> $V := (2xz + 2xy - y^2 - z^2; 2yz - z^2; 0)^T$
sei ein gegebenes Vektorfeld und K bezeichne den positiv orientierten Einheitskreis in der x,y-Ebene.
Ausschließlich mit Hilfe des Stoke'schen Integralsatz berechne man $\int_K (\text{rot} V)\, dk$

<u>Lösung:</u> $$\int_K (\text{rot} V)\, dk = \iint_S (\text{rot rot } V) \cdot n \cdot ds$$



Wähle Fläche S beil. als eingeschlossene Fläche der Kurve K.

n so wie rechtsgängige Schraube sich dreht!!

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $$\text{rot } V = \begin{pmatrix} 0 - 2y + 2z \\ 2x - 2z + 0 \\ 0 - 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + 2z \\ 2x - 2z \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$$

und damit ist
$$\text{rot rot } V = \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ 2 + 2 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir $$\int_K (\text{rot } V)\, dk = \iint_S (4, 4, 4)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds =$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\iint_S ds}_{r^2\pi = 1 \cdot \pi} = \underline{\underline{4 \cdot \pi}}$$

$r^2 \pi = 1 \cdot \pi$ (Flächeninhalt des Einheitskreises)

<u>Aufgabe 4:</u>
K bezeichne eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $(1,0)$ und Endpunkt $(0,-2)$, die sich beim Durchlaufen einer

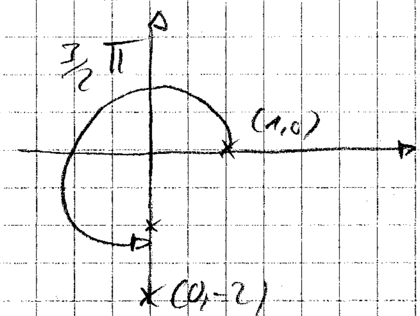
Ellipse (Normalform) mit Mittelpunkt (0,0) und den Achsenabschnittsparametern $a=1$ und $b=2$ ergibt.
Man berechne das Kurvenintegral $\int_K (1+2y)\,dx + x\,dy$

Lösung:

$x = \cos(t) = a\cdot\cos(t)$
$y = 2\cdot\sin(t) = b\cdot\sin(t)$

Elliptische Koordinaten (NORMALFORM) $\neq$ keine Polarkoord.

$t \in [0, \tfrac{3}{2}\pi]$



$\Rightarrow \quad dx = -\sin(t)\,dt, \quad dy = 2\cdot\cos(t)\,dt$

Damit gilt: $\int_K (1+2y)\,dx + x\,dy = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \big[(1+4\sin(t))(-\sin(t))$
$+ \cos(t)\cdot 2\cos(t)\big]\,dt =$

$= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left[-\sin(t) - 4\sin^2(t) + \cos^2(t)\cdot 2\right] dt =$

$= \cos(t) - 2t + \sin(2t) + t + \frac{1}{2}\sin(2t) \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} =$

$= \cos(t) - t + \frac{3}{2}\sin(2t) \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}\pi - 1}}$