07.02.03 **Mathe-Repetitorium IV**

DGL's

1.1) $y' = \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

Anfangsbedingung:
$y(1) = -\frac{1}{2}$, $x > e^{-2}$

TYP: Ähnlichkeits-DGL

Ansatz: ① Substitution $z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z\,x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z' \cdot x + z$$

② Einsetzen: $z'x + z = z + z^2 \qquad x \neq 0$

$$z' = \frac{1}{x} \cdot z^2$$

③ Trennung d. Veränderlichen: (= 1 Variable auf linke Seite, die andere auf rechte Seite)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{z^2} \, dz = \frac{1}{x} \, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{z^2} \, dz = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$-\frac{1}{z} = \ln|x| + C \rightarrow z = -\frac{1}{\ln|x| + C}$$

④ Rücksubstitution $y = -\frac{x}{\ln|x| + C}$

⑤ Anfangsbed.: $\left.\begin{array}{l} y(1) = -\frac{1}{2} \\ y(1) = -\frac{1}{C} \end{array}\right\} C = 2$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{x}{\ln x + 2}, \quad x > e^{-2}$$

→ Damit fallen Betragsstriche weg!

VARIATION D. KONSTANTEN

Aufgabe 2: Man bestimme die Lsg. des Anfangswertproblems.

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2} \cdot y + x^2 \quad , y(0) = 1$$

Typ: lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung
$(y' = p(x) \cdot y + r(x))$

hier: ~~in~~homogene DGL (da. $r(x) = 0$)
erst

Also: Löse zuerst die zugehörige homogene DGL
[allg. wäre das $y' = p(x) \cdot y$]

hier: $y' = -\frac{2x}{1+x^2} y$ ← diese wird gelöst über "Trennung d. Variablen"

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2x}{1+x^2} dx \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|1+x^2| + \tilde{C}$$

$$y = e^{-\ln(1+x^2) + \tilde{C}}$$

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{\ln((1+x^2)^{-1})} = C \cdot e^{\ln \frac{1}{1+x^2}} = \frac{C}{1+x^2}$$

Jetzt: Lösung d. inhomogenen DGL über Variation d. Konstanten

Ansatz: $y(x) = \frac{c(x)}{1+x^2}$ ← für Funktion einsetzen

$$y'(x) = \frac{c'(x)(1+x^2) - c(x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

Einsetzen in DGL: $\frac{c'(x)(1+x^2) - c(x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)} \cdot \frac{c(x)}{(1+x^2)} + x^2$

$$\Rightarrow \frac{c'(x)}{1+x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow c'(x) = x^4 + x^2$$

$$c(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + K$$

mit $K \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + k}{1+x^2} \qquad \left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y(0) = k \end{array}\right\} k = 1$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 1}{1+x^2}$$

- Aufgabe 3

Man ermittle alle Lösungen von

$$y'' + 6y' + 25y = 29\sin(3x)$$

inhomogen, da rechte Seite $\neq 0$

lin. DGL 2. Ordnung mit inhomogenem Anteil

wieder erst inhomogene DGL hier

Satz: $y(x) = y_s(x) + y_h(x)$

allg. Lösung d. inhomogenen linearen DGL = eine spezielle Lsg der inhomogenen DGL + allg. Lösung der zugehörigen homogenen linearen DGL

Bestimme Lösung d. zugehörigen homogenen DGL:

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

DGL n-ter Ordnung & falls Lösung existiert $\Rightarrow$ es gibt n linear abh. Lösungen (hier also 2)

$\Rightarrow$ diese bilden sog. Fundamentalsystem

$\Rightarrow$ davon ist die allg. Lösung dieser homogenen linearen DGL eine Linearkombination dieses Fundamentalsystems

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$

$y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

nicht verwechseln mit EW!

Einsetzen: $\lambda^2 e + 6\lambda e^{\lambda x} + 25 e^{\lambda x} = 0 \quad | : e^{\lambda x} \neq 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ (charakteristisches Polynom)

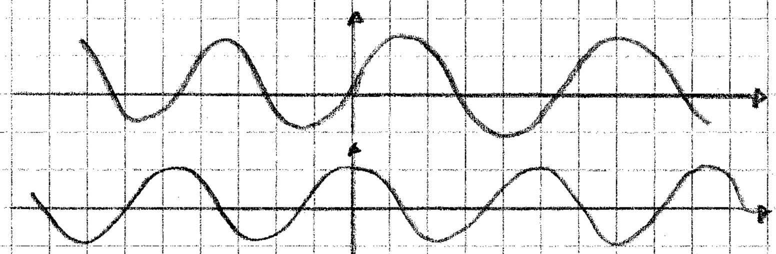
$$\frac{-6 \pm \sqrt{36-4\cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64 i^2}}{2}$$

$$\lambda_1 = -3+4i \qquad \bar{y}_1(x) = e^{(-3+4i)x} = e^{-3x}(\cos(4x) + i\sin(4x))$$

$$\lambda_2 = -3-4i \qquad \bar{y}_2(x) = e^{(-3-4i)x} = e^{-3x}(\cos(4x) - i\sin(4x))$$

$$e^{-3x}(\cos(-4x) + i\sin(-4x))$$

punktsymmetrisch — sin



achsensymmetrisch — cos

wenn 2x gleiche Lösung rauskommt, dann einfach 2. Lsg mit x multiplizieren! jetzt reelles Fundamentalsystem:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-3x}\cos(4x) \\ y_2(x) &= e^{-3x}\sin(4x) \end{aligned}\right\} \; y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Spezielle Lsg $y_s(x)$ über "Ansatz vom Typ d. rechten Seite"

$$y_s(x) = a\cdot\sin(3x) + b\cos(3x) \quad \leftarrow \text{aus Tabelle!!}$$

$$y_s'(x) = 3a\cdot \cancel{\sin}\cos(3x) - 3b\cdot\sin(3x)$$

$$y_s''(x) = -9a\sin(3x) - 9b\cos(3x)$$

<u>Einsetzen:</u> $-9a\sin(3x) - 9b\cos(3x) + 18a\cos(3x) -$
$-18b\sin(3x) + 25a\sin(3x) + 25b\cos(3x) \overset{!}{=} 25\sin(3x)$

$\sin(3x), \cos(3x)$ linear unabh. über $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)} \quad -9a + 18b + 25a = 25 \\ &\text{II)} \quad -9b + 18a + 25b = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &16a - 18b = 25 \\ &16b = -18a \quad \Rightarrow a = -\frac{16}{18}b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{5}, \; b = -\frac{9}{10}$$

$$y_s(x) = \frac{4}{5}\sin(3x) - \frac{9}{10}\cos(3x)$$

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x) = \frac{4}{5}\sin(x) - \frac{9}{10}\cos(3x) + C_1 \cdot e^{-3x} \cdot \cos(4x)$$
$$+ C_2 \cdot e^{-3x} \cdot \sin(4x)$$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

4. Aufgabe

Gegeben sei die DGL:

$$y' + \left(y^2 - \frac{2}{\cos^2 x}\right)\sin x = 0$$

nicht linear, da y^2

a) Zeigen Sie: $u(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ ist eine spez. Lösung der DGL

b) ermitteln Sie alle Lösungen der DGL!

zu a) $u'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2(x)} \xrightarrow{\text{einsetzen}} \frac{\sin x}{\cos^2(x)} + \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}\right)\sin x = 0$ ✓

zu b) Typ: Ricatti'sche DGL

allg.: $y' + p(x) y + q(x) \cdot y^2 + r(x) = 0$

hier: $p(x) = 0$, $q(x) = \sin x$, $r(x) = -\frac{2\sin x}{(\cos x)^2}$

Ansatz, falls eine spezielle Lsg bekannt ist $(u(x))$:

$$y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)}$$

$$y'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2(x)} - \frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Einsetzen in DGL:

$\frac{1}{\cos(x)}$

$$\frac{\sin x}{\cos^2(x)} - \frac{v'(x)}{v^2(x)} + \left[\left(u(x) + \frac{1}{v(x)}\right)^2 - \frac{2}{\cos^2(x)}\right] \cdot \sin(x) = 0$$

$$-\frac{v'(x)}{v^2(x)} + \frac{2\sin(x)}{v(x)\cdot\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{v^2(x)} = 0$$

nur x — $\sin(x)$ auf rechte Seite

$$*)\quad v'(x) - \frac{2\sin(x)}{\cos(x)} \cdot v(x) = \sin(x)$$ ← lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung

$v'(x)$

Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$v'(x) - \frac{2\sin x}{\cos(x)} \cdot v(x) = 0$$

Trennung d. Variablen:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2\sin x}{\cos x} \cdot v(x) = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2\sin x}{\cos x} v(x)$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{v(x)}\, dv = \int \frac{2\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$\ln|v| = -2\ln|\cos x| + \tilde{C}$$

$$\left[\text{Einschub}: \frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$\cancel{v = e^{-2} \cos(x) \cdot c}$$

$$v = c \cdot e^{-2\ln|\cos(x)|} = c \cdot e^{\ln|\cos^{-2}(x)|} = c \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Ansatz: $v(x) = \frac{c(x)}{(\cos x)^2} \Longrightarrow v'(x) = \frac{c'(x)\cdot\cos^2(x) + c(x)\cdot 2\cos(x)\sin(x)}{\cos^4(x)}$ Quotientenregel

Variation d. Konstanten
für Lsg. von inhomogenen DGL

EINSETZEN IN $*$)

$$\frac{c'(x)\cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x)\, c(x)}{\cos^4(x)} - \frac{2\sin(x)\, c(x)}{\cos(x)\cdot\cos^2(x)} = \sin(x)$$

$$\rightarrow c'(x) = \sin(x)\cos^2(x)$$ BRONSTEIN

$$\rightarrow c(x) = -\tfrac{1}{3}\cos^3(x) + k \quad, k \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow v(x) = \tfrac{1}{\cos^2(x)} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}(\cos x)^3 + k\right) \quad, k \in \mathbb{R}$$

Einsetzen: $y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{3\cos^2(x)}{3k - (\cos x)^3} \quad, k \in \mathbb{R}$