

Mathematik für Ingenieure III

I Funktionen von mehreren reellen Variablen

Definition 1.1: Funktion $u = f(x)$ mit $x \in D$ ($D = f(x) \subset \mathbb{R}^n$) und $u \in \mathbb{R}$ heißen Funktionen von n Variablen (auch (reelle-) skalarwertige Funktionen). Dabei sei $X = (x_1 \dots x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)$

Wir schreiben auch

$U = f(x_1 \dots x_n), (x_1 \dots x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ (Je nach Zusammenhang schreibt man auch

$$u = f(x, y), u = f(r, \varphi), u = f(x, y, z)$$

Beispiel 1.2: Kegelfunktion gegeben durch

$$u = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

und Höhenlinien (bzw. Niveau o. Äquipotentiallinien)

$$\sqrt{h} = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = h\}$$

Partielle Ableitungen der Gradienten

Definition 1.3: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $(a_1, \dots, a_n) \in D$. Existieren die Ableitungen der partiellen Funktion

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

an der Stelle $x_i = a_i$, so nennt man dies die partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt a_i .

Man bezeichnet

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \text{ oder } \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=a}$$

(man beachte hier ∂ anstatt d !

Für partielle Ableitungen verwendet man auch die Notation

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{|x} \text{ bzw. } f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (fx)_y = f_{|12} = D_y D_x f$$

Kann die Reihenfolge der Differenzierung vertauscht werden?

Beispiel 1.2: Sei $f(x, y) = \left\{ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0|0) \right\}$

Außerhalb des Punktes $(0|0)$ gelten

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 y - 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \text{ bzw. } \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = -y$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^4 y - 4x^3 y^2 + x^5}{(x^2 + y^2)^2} \text{ bzw. } \frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = x$$

Da $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ gilt folgt:

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = -y \text{ und } \frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Es gilt nun

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y \partial x} = -1 + 1 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x \partial y}$$

Satz 1.5: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sein in einer gewissen ε -Umgebung U vorhanden und in (x_0, y_0) stetig. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Definition 1.6: Die partielle Ableitung einer Funktion zu einem Vektor zusammen gefaßt, bezeichnet man als Gradienten von f an Der Stelle x

$$\text{grad } f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} (= \nabla f(x)) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{(bzw. } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T \text{)}$$

f heißt k -mal partiell diffbar, wenn alle k -ten Ableitungen existieren, sind sämtliche Ableitungen stetig, dann heißt f k -mal stetig partiell Diffbar.

Definition 1.7: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Menge der k -mal stetig part. diffb. Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir jetzt mit $C^k(D, \mathbb{R})$ (oder kurz C^k , wenn D und \mathbb{R} aus dem Zusammenhang klar sind) und nennen $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ eine C^k -Funktion.

$$C^k(D, \mathbb{R}) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f : k\text{-mal stetig part. diffbar.}\}$$

$$C^0(D, \mathbb{R}) (= C(D, \mathbb{R})) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

Definition 1.8: (Satz von Schwarz)

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind für jedes $f \in C^m(D)$ ($m \in \mathbb{N}$) die part. Ableitung der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Definition 1.9: (Landau-Symbol, klein o)
 Für $f, g : R^n \subset D \rightarrow R$ und $x_0 \in D, k \in N$ schreibt man
 $f(x) = g(x) + o(|x - x_0|)^k$

falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{|x - x_0|^k} = 0$$

Bemerkung: O-Symbol ist keine eindeutig festgelegte Funktion.

Die Approximation einer diffb. Funktion einer Variablen $f : I \rightarrow R$ ($I \subset R$ offenes Intervall) in der Umgebung von $x_0 \in I$ durch eine lineare Funktion

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

wird mit dem O-Symbol geschrieben als

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Für Funktionen von mehreren Variablen gewährt die partielle Differenzierbarkeit allein noch nicht die analoge Approximation durch lineare Funktionen.

Definition 1.10: Sei $D \subset R^n$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow R$ heißt in $x_0 \in D$ total differenzierbar (oder linear approximierbar, wenn es einen Vektor $a \in R^n$ mit

$$(i) \quad f(x) = f(x_0) + \langle a, (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|)$$

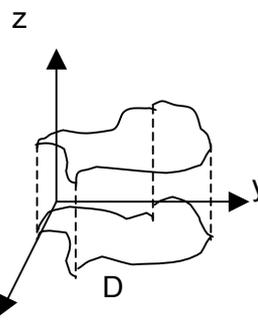
(für x nahe x_0) gilt

Anschauliche Deutung:

Der „über“ $D \subset R^2$ liegende Graph $z = f(x, y)$ wird in der Nähe des Flächenpunktes $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ durch die Ebene

$$z = f(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

mit einem Fehler $R(x, y) = o\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$



Satz 1.11: Ist f in $x_0 \in D$ total diffb., $f(x) = f(x_0) + \langle a, (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|)$,
 Dann gilt:

a) f ist stetig in x_0

$$b) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + hv) - f(x_0)) = \langle a, v \rangle \quad (v \in R^n, v \neq 0)$$

c) f ist part. diffb. und a eindeutig bestimmt als $a = \text{grad } f$.

Beweis: a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \langle a, (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|) = 0$

b) Für Punkte der Geraden $x_0 + hv$ ergibt (i) (in Def. 1.10)

$f(x_0 + hv) - f(x_0) = h \langle a, v \rangle + o(|hv|)$ Division durch h und anschließenden Grenzübergang liefert die Behauptung.

c) Man nimmt $v = e_i$ in b) und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h e_i) - f(x_0)) \text{ dann}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle a, e_i \rangle = a_i$$

Im Sinne von Def.1.10 bedeutet

$$f(x) = f(x_0) + \langle \text{grad } f(x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|)$$

die lineare Approximation von $f(x)$ nahe bei x_0 .

Satz 1.12: Jede C^1 -Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) ist auf D total diffbar.

Beispiel: In der Umgebung von (1,1) lautet die lineare Approximation der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + 2x^3y^2 + y$$

$$f(x, y) = f(1,1) + \langle \nabla f(1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \rangle + o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})$$

$$= 4 + 10(x-1) + 5(y-1) + o$$

Dementsprechend

$$z = 4 + 10(x-1) + 5(y-1) \text{ bzw. } 10x + 5y - z = 11$$

die Gleichung der Tangentialebene der Fläche

$$z = x^4 + 2x^3y^2 + y$$

im Flächenpunkt (1,1,4)

Richtungsableitung

Partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ geben die Änderung der Funktion in

Richtung der Koordinatenachsen an.

Wie sieht es mit anderen Richtungen aus?

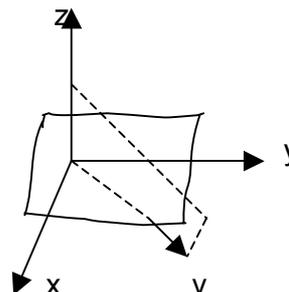
Betrachten wir den Fall $n = 2$!

Man lege jetzt eine zur z-Achse parallele Ebene durch die Gerade

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad |v| = 1$$

Die Schnittläufe des Graphen $z = f(x, y)$ besitzt die Darstellung:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t v_1 \\ y_0 + t v_2 \\ f(x_0 + v_1, y_0 + v_2) \end{pmatrix}$$



Mit dem Tangentialvektor:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(f(x_0 + v_1, y_0 + v_2)) - f(x_0, y_0)) \end{pmatrix}$$

im Kurvenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Die Tangente hat den Anstieg

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(f(x_0 + v_1, y_0 + v_2)) - f(x_0, y_0))$$

Die motiviert den Begriff Richtungsableitung. Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$, nennen wir den Grenzwert

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv_1) - f(x))$$

(sofern er existiert) die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v_1 .

Bemerkung: *Notation:* Anstatt $\partial_v f(x)$ verwendet man häufig auch

Schreibweisen wie

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) \text{ oder } D_v f(x)$$

Satz i.14: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für alle total diffbar. Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$, gilt

$$\partial_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i \right)$$

Wie sieht es mit dem Änderungsverhalten einer Funktion längs eines im Def.bereich verlaufenden Kurve (z.B. Bahn eines bewegten Punktes) aus?

Diese Untersuchung führt zur Kettenregel.

Satz i.16: Für jede C^1 -Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und für jedes Kurvenstück $x : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow D$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t)) &= \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(x_1(t) \dot{x}_1(t) \right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(x_2(t) \dot{x}_2(t) \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(x_n(t) \dot{x}_n(t) \right) \\ &= \langle \text{grad } f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \end{aligned}$$

Bedeutung des Gradienten

Sei $f : R^n \supset D \rightarrow R$ ein C^1 -Funktion. Dann ist der Anstieg im Punkt $x \in D$ in Richtung eines Vektors $v \in R^n, |v|=1$ gegeben durch

$$\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle = |\nabla f(x)| |v| \cos \alpha = |\nabla f(x)| \cos \alpha$$

wobei α der Winkel zwischen den Vektoren $\nabla f(x)$ und v ist.

$\partial_v f(x)$ ist am größten, falls $\cos \alpha = 1$ d.h. $\alpha = 0$ ist

Also gilt: für $\nabla f(x) \neq 0$

Richtung von $\nabla f(x)$ = Richtung des stärksten Anstiegs von x in x .

Vektorwertige Funktionen

Betrachten wir Funktionen, die jedem Ortsvektor $x \in D \subset R^n$ ein Vektor $f(x) \in R^n$ zuordnen.

$$f : R^n \supset D \rightarrow R^n, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

und übertragen alle Begriffe skalarer Funktionen auf vektorwertige Funktionen.

Definition 1.19: Sei $f : R^n \supset D \rightarrow R^n$ und $x_1, x_2 \in D$

i) Grenzwert, partielle Differentiation und Landau-Symbol „o“ sind komponentenweise definiert, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = o(|x - x_0|) \Leftrightarrow f_k(x) = o(|x - x_0|) \quad (k = 1, \dots, m)$$

ii) f stetig, part. diffb. oder C^1 -Funktion genau dann wenn sämtliche Komponentenfunktionen f_k von f ($k = 1, \dots, m$) stetig part. diffb. bzw. C^1 -Funktion sind.

iii) f heißt in $x_0 \in D$ total diffb. oder linear approximierbar, wenn es ein $(n \times n)$ -Matrix A und eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ in D gibt, so daß für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt:
 $\otimes f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$
 lineare Approximierbarkeit aller Komponentenfunktionen folgt aus \otimes , d.h.:

$$f_k(x_0) = f_k(x_0 + \langle \nabla f_k(x_0), (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|))$$

Man definiert daher die Funktionsmatrix oder Jacobi-Matrix von f in x :

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0)^T \\ \vdots \\ \nabla f_{n_1}(x_0)^T \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{m \times n}$$

Mit Satz 1.11 ist A in \otimes eindeutig bestimmt als

$$A = J_f(x_0)$$

Die lin. App.eigenschaften schreibt man ($f \in C^1$)

$$f(x) \approx f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0)$$

mit einem Fehler

$$o(|x - x_0|)$$

Für $x \in R^n$, $v(x), w(x) \in R^m$, $f(x) \in R$ und $\alpha, \beta \in R$. Es gelten die Ableitungsregeln:

- $J_{\alpha v + \beta w}(x) = \alpha J_v(x) + \beta J_w(x)$
- $J_{f \circ v} = f'(x) J_v(x) + v(x) J_f(x)$
 $= f'(x) J_v(x) + v(x) (\nabla f(x))^T$
- $J_{v^T w} = v(x)^T J_w(x) + w(x)^T J_v(x)$
- $J_{v \times w} = v(x) \times J_w(x) - w(x) \times J_v(x)$

Kettenregel

Seien $f: R^n \supset D \rightarrow R^m$, $g: R^m \supset G \rightarrow R^2$ mit $f(D) \subset G$, f und g nacheinander ausgeführt ergeben die Komposition $g \circ f: D \rightarrow R^2$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Satz 1.20: Sind $f: R^n \supset D \rightarrow R^m$ in $x_0 \in D$, $g: R^m \supset G \rightarrow R^2$ in $f(x_0) \in G$ linear approximierbar, dann ist auch die Komposition $g \circ f$ linear approximierbar und es gilt:

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

Räumliche Skalaren- und Vektorenfelder

Für den Fall R^3 betrachten wir spezielle Skalaren- und Vektorenfelder.

- ein Skalarfeld ordnet jedem Punkt $x \in D$ eine Zahl (Skalar) aus R zu.
- ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt $x \in D$ einen Vektor $v(x) \in R^m$, $m > 1$.

Man spricht von einem C^k -Skalarfeld f oder einem C^k -Vektorfeld v auf D wenn f bzw. v C^k -Funktionen sind.

Jede C^1 -Funktion $f : R^3 \supset D \rightarrow R$ ordnen wir das Vektorfeld Gradient zu

$$\nabla f : D \rightarrow R^3, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}$$

Jeder C^2 -Funktion f mit dem Laplace-Operator ∇ das Skalarfeld $\nabla^2 f$

$$\nabla^2 f : D \rightarrow R, \quad \nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \text{ (kann man auch in bel. } R^d \text{ def.)}$$

Sei $v : R^3 \supset D \rightarrow R^3$ ein C^1 -Vektorfeld dann definieren wir ein Skalarfeld

$$\text{„Divergenz“ } \operatorname{div} : D \rightarrow R, \quad \operatorname{div} v(x) = \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(x)}{\partial x_3}$$

und ein Vektorfeld

$$\text{„Rotation“ } \operatorname{rot} : D \rightarrow R^3, \quad \operatorname{rot} v(x) = (\nabla \times v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Es beschreiben „ $\operatorname{div} v$ “ die Quellendichte und „ $\operatorname{rot} v$ “ die Wirbeldichte des Vektorfeldes v .

Rechenregeln

- i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
- ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$
- iii) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f$
- iv) $\operatorname{div}(f \cdot v) = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \cdot \operatorname{div} v$
- v) $\operatorname{rot}(f \cdot v) = \operatorname{grad} f \times v + f \cdot \operatorname{rot} v$
- vi) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) - \nabla^2 v$

(Komponentenweise auswerten)

Man bezeichnet ein Vektorfeld v als ein Gradientenfeld, wenn es ein Skalarfeld f auf G gibt so daß

$$v(x) = \operatorname{grad} f(x) \quad (x \in G)$$

Die Funktion $U := -f(x)$ nennt man das Potential des Vektorfeldes v , und man sagt v besitzt ein Potential.

Satz 1.22

Sei v ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $D \subseteq R^n$. Dann kann v höchstens ein Potential besitzen, wenn seine Ableitungen

$$\text{symmetrisch sind, d.h. } \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

Beweis: Im Falle $v = \text{grad } f$ ist nämlich $v_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Die Taylor-Formel:

Zur Erinnerung die Taylor-Formel im Eindimensionalen

Satz 1.23

$I \subset \mathbb{R}$ offen $f \in C^{k+1}(I)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_{k+1}(x_k)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_{k+1}(x_k) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-x_0) \quad \xi \in (x, x_0)$$

Verallgemeinern wir die Taylor-Formel aus Satz 1.23 auf C^{k+1} -Funktionen $f: \mathbb{R}^n \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ in $n > 1$ Veränderlichen.

Betrachten wir für $x \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $h(t) := f(x+tv)$ ($0 \leq t \leq 1$)

Dies setzt voraus, daß die ganze x und $x+v$ verbindende Strecke in I liegt.

Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, daß D konvex ist, d.h.

- i) D offen
- ii) $x, y \in D \Rightarrow x+t(y-x) \in D$ ($0 \leq t \leq 1$)

Die Taylor-Formel für $h(t)$ ausgewertet für $t = 0$ lautet:

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2} h''(0) + \dots + \frac{1}{(k+1)!} h^{(k+1)}(\xi)$$

Die Ableitung $h^{(l)}(t)$ bzw. $h^{(l)}(0)$ lassen sich mit der Kettenregel bestimmen. Dazu verwenden wir den Differentialoperator

$$\partial_v = \langle \nabla, v \rangle \quad (\text{d.h. } \partial_v := v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n})$$

mit der Eigenschaft

$$\partial_v C^l(D, \mathbb{R}) \rightarrow C^l(D, \mathbb{R}) f(x) \rightarrow \partial_v f(x)$$

$$h(1) = f(x+v)$$

$$h(0) = f(x)$$

$$\dot{h}(t) = \langle \nabla f(x+tv), v \rangle; \dot{h}(0) = \partial_v f(x)$$

$$\ddot{h}(t) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \langle \nabla f \rangle_{x_i}(x+tv), V \rangle; \ddot{h}(0) = \partial_v^2 f(x)$$

Satz 1.24: (Taylor-Formel für n-Variablen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet, $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$. Dann gilt mit $x+v \in D$ die Approximationsformel

$$\otimes f(x+v) = f(x) + \partial_v f(x) + \frac{1}{2!} \partial_v^2 f(x) + \dots + \frac{1}{k!} \partial_v^k f(x) + R_{k+1}(x, v)$$

mit dem Restglied $R_{k+1}(x, v) := \frac{1}{(k+1)!} \partial_v^{k+1} f(x + \xi v)$ $\xi \in (0, 1)$

Bemerkung:

Mit Hilfe von Satz I.24 lässt sich eine Funktion $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) in der Umgebung eines festen Punkts $x_0 \in D$ durch ein Polynom (sog. Taylor-Polynom) approximieren.

$$p(x) := f(x_0) + \partial_v f(x_0) + \frac{1}{2!} \partial_v^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{k!} \partial_v^k f(x_0)$$

Für den Fehler gilt $f(x) - p(x) = R_{k+1}(x_0, x - x_0) = o(|x - x_0|^2)$

Für eine C^2 - Funktion heißt die nach dem Satz von Schwarz symmetrische Matrix

$$H_f(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{x_1 x_m}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{x_m x_1}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{x_m x_m}(x) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix im Punkt x .

Da $\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$ und $\partial_v^2 f(x) = v^T H_f(x) v = \langle v, H_f(x) v \rangle$

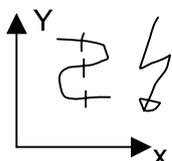
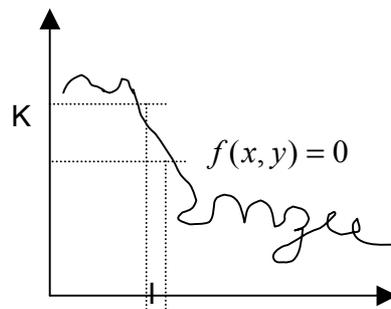
Ergibt sich die Taylor-Formel für einige spezielle $k = 0, 1, 2$ in \otimes einsetze $x = x_0$ dann $v = x - x_0$

Korollar I.25: Spezialfälle der Taylor-Formel

- a) $f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(\tilde{x}), x - x_0 \rangle$ (Mittelwertsatz) mit $\tilde{x} = x + \lambda(x_0 - x)$ ($\lambda \in [0, 1]$)
- b) $f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \cdot H_f(\tilde{x}) \cdot (x - x_0)$ mit $\tilde{x} = x + \lambda(x_0 - x)$ ($\lambda \in [0, 1]$)
- c) $f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \cdot H_f(\tilde{x}) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$

Implizite Funktionen

Bisher hatten Funktionen $g : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ die wir mit den Methoden der Differentialrechnung untersucht haben, die explizite Form $y = g(x)$. Ist der Zusammenhang zwischen x und y jedoch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ implizit gegeben, so ist y i.allg. nicht eindeutig festgelegt.



Definition 1.25: Sei $f : R^2 \supset D \rightarrow R$. Man nennt, die durch $f(x, y) = 0$ auf $I \subset R$ erklärte Funktion $g : I \rightarrow K \subset R$ eine implizite Funktion, wenn es zu jedem $x \in I$ genau ein $y \in I$ gibt mit $(x, y) \in D$ und $f(x, y) = 0$. Dieses y wird mit $g(x)$ bezeichnet.

Beispiel: Durch $f(x, y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ($D = R^2$) ist genau eine implizite Funktion $g(x) : R \rightarrow R$ erklärt, da zu jedem $x \in R$ $e^y + y^3 = 1 - x^2 + x^3$ genau ein $y = g(x)$ existiert. Durch formale Umrechnung kann die Gleichung $e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ nicht nach y aufgelöst werden.

Satz 1.26: (über implizite Funktionen)
Sei $D \subset R^2$ offen und $f : D \rightarrow R$ stetig diffbar. Ist nun $(x_0, y_0) \in D$ ein Punkt der Niveaumenge $f(x_0, y_0) = 0$ mit $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, dann gibt es ein Intervall $I \subset R$, $K \subset R$ mit Mittelpunkten x_0, y_0 so daß gilt:

- i) $R := \{(x, y) | x \in I, y \in R\} \supset D$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ für alle $x, y \in R$
- ii) Durch $f(x_0, y_0) = 0$ ist auf I eindeutig eine diffbare implizite Funktion $g : I \rightarrow K$ erklärt mit der Ableitungen:

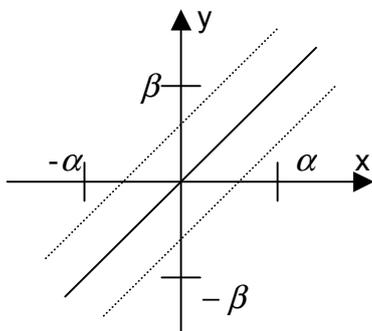
$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \text{ für alle } x \in I$$

Beweis: OBdA ist $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $f_y(0, 0) > 0$

ad i) Da f_y stetig ist nach Voraussetzung, gilt $f_y(x, y) > 0$ in einer ganzen Umgebung $U_\varepsilon(0, 0)$ $\varepsilon > 0$

ad ii) Betrachten wir nun f auf Rechtecken

$$\{(x, y) | -\alpha \leq x \leq \alpha, -\beta \leq y \leq \beta\} \subset U_\varepsilon(0, 0)$$



Da die Funktion $y \rightarrow f(0, y)$ mit $f(0, 0) = 0$ streng monoton wachsend ist, gilt $f(0, -\beta) < 0$ und $f(0, \beta) > 0$ für eine hinreichend kleines Intervall $-\alpha \leq x \leq \alpha$. Diese α und β definieren $I := (-\alpha, \alpha)$, $K := (-\beta, \beta)$. Für ein $x \in I$ ist $f(x, y)$ streng monoton wachsend und deshalb gibt es genau ein $y \in K$ mit $f(x, y) = 0$. Dieses eindeutig bestimmte y zu $x \in I$ mit $f(x, y) = 0$ bezeichnen wir mit $g(x)$.

Für jede Folge (x_n) aus I mit $x_n \Rightarrow x$ gilt $g(x_n) \Rightarrow g$.

Somit ist g stetig.

Sei $x \in I, y = g(x), \delta y = g(x + \delta x) - g(x)$. Für hinreichend kleines δx gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) = f_x(\xi, \eta)\delta x + f_y(\xi, \eta)\delta y \text{ mit } \xi \in (x, x + \delta x), \eta \in (y, y + \delta y)$$

Nun folgt aus

$$f(x, g(x)) = f(x + \partial x, g(x + \partial x)) = 0$$

und der Stetigkeit der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} \rightarrow -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \quad (\partial x \rightarrow 0)$$

Bemerkung: Höhere Ableitungen von $g(x)$ erhält man mit der Kettenregel

$$f(x, g(x)) = 0 \stackrel{\text{Abl.nach } x'}{\Rightarrow} f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

$$\stackrel{\text{Abl.nach } x'}{\Rightarrow} f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) + f_{yy}(x, g(x)) \cdot g'(x) \\ + f_{yy}(x, g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f_y(x, g(x)) \cdot g''(x) = 0$$

$$\Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{f_y} (f_{yy} + 2f_{xy}g' + f_{yy}(g')^2)$$

Bemerkung: Satz über implizite Funktionen läßt sich auf beliebige C^1 -Funktionen $f: R^n \supset D \rightarrow R$ verallgemeinern. Siehe Literatur!

Beispiel:

$$f(x, y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$$

$$\text{Es gilt: } g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{3x^2 + 2x}{e^y + 3y^2}$$

$$\text{Für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3} \text{ gilt } g'(x) = 0$$

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}}{f_y} + \frac{g'}{f_y} (2f_{xy} + f_{yy}g') = \frac{6x+2}{e^y + 3y^2} + \dots$$

$$g''(0) < 0, g''(-\frac{2}{3}) > 0$$

Lokale Extrema

Sei $f: R^n \supset D \rightarrow R$. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt lokale Maximalstelle (bzw. Minimalstelle) von f , wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so daß gilt für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0))$$

Gelten diese Gleichungen für alle $x \in D$, so bezeichnet man diese Stellen als globale Maximal- bzw. Minimalstellen!

Wie bestimmt man solche Extremstellen?

Man unterscheidet zwei Charakterisierungsmengen, je nachdem ob diese Extremstellen im

- inneren
- auf dem Rand von D liegen

Satz 1.28: „lokale Extremstellen im inneren“
 Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(U_\varepsilon(x_0))$ ($\varepsilon > 0$)
 Dann gilt: x_0 lokale Extremstelle von f
 $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$

Beweis: Nach der Vorlesung besitzt Funktion
 $h(t) := f(x_0 + t e_i)$ in $t = 0$ eine lokale Extremstelle.
 (e_i kanonischer Einheitsvektor)
 Somit gilt:

$$0 = \dot{h}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Man bezeichnet x_0 einen Stationären Punkt, wenn $\nabla f(x_0) = 0$ gilt.

Mit Satz 1.28 wissen wir nun, daß wir die lokalen Extremstellen von f in D unter den Stationären Punkten zu suchen haben. Ist ein stationärer Punkt keine Extremstelle, so spricht man von einem Sattelpunkt.

Ähnlich wie im eindimensionalen Fall charakterisierten wir die stationären Punkte in dem wir die „zweite Ableitung“ verwendeten.

Satz 1.29: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$ ein stationärer Punkt von $f \in C^2(D, \mathbb{R})$
 und $H_f(x_0) = (f_{x_i x_j}(x_0)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Hesse-Matrix von f in x_0
 Dann gilt:

- i) $H_f(x_0)$ pos. def. $\Rightarrow x_0$ ist eine lokale Minimalstelle
- ii) $H_f(x_0)$ neg. def. $\Rightarrow x_0$ ist eine lokale Maximalstelle
- iii) $H_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow x_0$ ist ein Sattelpunkt

Beweis: Für jedes x_0 in einer ε -Umgebung von x_0 gilt, mit

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(x^*) (x - x_0)$$

und $\nabla f(x_0) = 0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(x^*) (x - x_0) \quad \otimes$$

mit einem x^* zwischen x und x_0 .

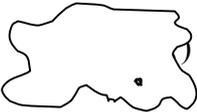
Da $H_f(x)$ stetig ist, ändern sich auch in einer ganzen Umgebung von x_0 die Vorzeichen der Eigenwerte von $H_f(x)$ nicht.

In dieser Umgebung ist die rechte Seite von \otimes stets positiv (i), stets negativ (ii) oder sowohl positiv als auch negativ (iii). Somit

$f(x) > f(x_0)$ (i) oder

$f(x) < f(x_0)$ (ii) oder weder i) noch ii)

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Beispiel:  $f(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \stackrel{!}{=} \text{Minimiere}$
 NB: $h(x, y) - c = 0$ ($C \in \mathbb{R}$)

Wir untersuchen nun Extremwertaufgaben

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{!}{=} \text{Extr.}$$

Bei der die Menge der zulässigen Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ durch eine oder mehrere Nebenbedingungen der Form

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

eingeschränkt ist.

Betrachten wir nun $k = 1$. Sei $E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$. Nun bezeichnet $x_0 \in E$ eine Maximalstelle (Minimalstelle) von f unter der NB $g(x) = 0$, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so daß $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap E$ gilt. Die Aufgabenstellung schreiben wir kurz:

$$f(x) \stackrel{!}{=} \text{Extr.} \quad \text{NB: } g(x) = 0 \quad (\text{maximiere } f(x), \text{ NB } g(x) = 0)$$

1 Methode:

(explizite Methode, funktioniert nur eingeschränkt)

Man löst $g(x) = 0$ nach einer Variablen auf, z.B. $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$

Und setzt diese in f ein, d.h. man eliminiert diese Variable aus f .

Man erhält somit eine Extremwertaufgabe ohne

Nebenbedingung:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \stackrel{!}{=} \text{Extr.}$$

2 Methode:

(Parametrisierung der Nebenbedingung)

Sei $g: \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \leq m$) mit $g(x) = 0$, d.h. es gibt n NB.

Man bestimme nun zu g eine Parametrisierung

$$f(x_1(Z), \dots, x_n(Z)) \quad Z \in G \subset \mathbb{R}^n$$

der Fläche $g(x) = 0$ und löst für

$$F(z) = f(x_1(z), \dots, x_m(z))$$

das gewöhnliche EW-Problem

Beispiel:

Man suche das Extremum von $f(x, y, z) = 3x^2 + z^3 + 4xy^4z$ auf der Fläche der Einheitskugel $s \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) \stackrel{!}{=} \text{Extr.} \quad \text{NB } g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Man wähle Kugelkoordinaten

$$x = r \cdot \sin \psi \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \psi \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \psi$$

Die Oberfläche der Einheitskugel hat dann die Parametrisierung:

$$r = 1; \psi \in (0, \pi); \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$f(x(r, \varphi, \psi), y(r, \varphi, \psi), z(r, \varphi, \psi)) =$$

$$3r^2 \sin^2 \psi \cos^2 \varphi + r^3 \cos^2 \psi + 4r^4 \sin \psi \cos \varphi \sin^2 \psi \sin^2 \varphi \cos \psi$$

$$\tilde{f}(1, \varphi, \psi) = 3 \sin^2 \psi \cos^2 \varphi + \dots$$

3 Methode:

(Lagrange-Methode)

Wir setzen voraus, daß f und g C^1 -Funktionen sein und daß der Gradient ∇g nicht verschwindet in der gesuchten Extremstelle

$x_0 \in E$. Da der $\nabla g \neq 0$ gilt, nehmen wir oBdA $\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. Nach

dem Satz für implizite Funktionen ist die NB $g(x) = 0$ lokal um x_0 nach x_n aufgelöst, d.h. es existiert die

Funktion $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$. Da wir x_0 als Extremstelle angenommen haben gilt nun

$$\nabla f \left(\underbrace{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n-1}, h(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n-1})}_{x_0} \right) = 0$$

Anwenden der Kettenregel und Ableitung einer implizierten Funktion liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(- \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0)} \right) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \right)^{-1}}_{= \lambda \in R} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in R : \nabla f - \lambda \nabla g = 0 \end{aligned}$$

Mit obiger Schlußfolgerung haben wir den folgenden Satz gefunden

Satz 1.30: Für jede Extremstelle x_0 des Problems

$$f(x, y, z) \stackrel{!}{=} \text{Extr.}, \quad \text{NB } g(x) = 0$$

mit C^1 -Funktionen f und g und $\nabla g(x_0) \neq 0$ gilt, daß eine Zahl λ existiert, $\lambda \in R$, so daß

$$\nabla f(x_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0) = 0$$

gilt.

Bemerkung: Unter der Voraussetzung $g, f \in C^1$ und $\nabla g(x_0) \neq 0$ lassen sich mit Satz 1.30 mögliche Extremstellen finden.

Kochrezept I.31: (Anwenden von Lagrange-Multiplikatoren)

1. Schritt: Man definiert eine Hilfsfunktion

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

2. Schritt: Man löst das i.allg. nicht lineare Gleichungssystem

$$\nabla L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0$$

3. Schritt: (schwierig)

Man stelle fest, welche gefundenen Punkte mit $\nabla L = 0$ wirklich Extremstellen sind. Das ist i.allg. recht schwierig und aufwendig. Häufig genügt ein direkter Vergleich der Funktionswerte.

Beispiel:

Man maximiert das Volumen eines Quaders mit achsenparallelen

Kanten innerhalb eines Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. D.h. man

untersucht das Problem maximiere $V(x, y, z) = 2x \cdot 2y \cdot 2z$ unter der

Nebenbedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Lagrange-Multiplikatoren:

Man setzt $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) := 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$ und bekommt

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} \\ 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} \\ 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \end{pmatrix}$$

Man löst $\nabla L = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x) = 8xyz + 2\lambda \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{x^2}{a^2} = -4xyz$$

ebenso

$$-4xyz = \lambda \frac{y^2}{b^2} = \lambda \frac{z^2}{c^2} \left(= \lambda \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Da wir $\lambda = 0$ ausschließen können, gilt:

$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}$ und es ergibt sich die Extremstelle aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ d.h. } x = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ und ebenso } y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Maximales Volumen ist somit

$$V(x, y, z) = 8 \frac{abc}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} abc$$

II Integration (1D)

Problem: Auf $I \subset \mathbb{R}$ sei f gegeben, von der wir wissen, daß sie Ableitung einer Funktion F ist, d.h. $F' = f$ auf I .
Gesucht ist F .

Könnten wir auf irgend eine Weise eine Stammfunktion F_0 zu f auf I gewinnen so gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $F - F_0 = C$. Könnten wir zusätzlich noch einen Wert von F an einer beliebigen Stelle $x_0 \in I$ angeben, so muß $C = F(x_0) - F_0(x_0)$ und somit

$F(x) = F_0(x) + (F(x_0) - F_0(x_0))$ gelten. Zwei wesentliche Fragestellungen warten nun auf uns:

- i) Wie kann man eine Funktion F aus ihrer als bekannt angenommenen Ableitung wieder gewinnen?
- ii) Wie kann man einer gegebenen Funktion ansehen, ob sie einen Stammfunktion besitzt?

Unbestimmte Integrale

Ist F auf $I \subset \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f , d.h. $F'(x) = f(x)$ ($x \in I$) so bezeichnen wir F als eine Stammfunktion von f , bzw. unbestimmtes Integral von f auf I . Eine Funktion f unbestimmt über das Intervall I zu integrieren, bedeutet einfach, irgend eine Stammfunktion von f auf I zu berechnen.

Schreibweise:

$$F(x) = \int f(x) dx \text{ auf } I \quad (F = \int f dx \text{ auf } I)$$

Bemerkung: \int stilisiertes Σ

Bemerkung: Das Symbol $\int f(x) dx$ bezeichnet irgend eine Stammfunktion von f , d.h. es gilt auch für $C \in \mathbb{R}$ $\int f(x) dx = F(x) + c$ auf I

Bemerkung: Aus $\int f(x) dx = F(x)$ und $\int f(x) dx = G(x)$ folgt nicht $F(x) = G(x)$ auf I

Die bestimmte Integration ist die Umkehrung der Differentiation, d.h. für $x \in I$ gilt:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \text{ und } \int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + c \quad \otimes$$

vorausgesetzt es existiert eine Stammfunktion $\int f(x) dx$ und f ist diffbar.

Eine Beziehung

$$\int f(x) dx = F(x) \text{ auf } I$$

kann somit immer durch Differentiation überprüft werden. Mit \otimes erkennt man daß jede Differentiationsformel sofort eine Integrationsformel liefert.

z.B.:

$$C(x)' = c \Rightarrow \int C(x)' dx = \int c dx = cx \text{ auf } \mathbb{R} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha \Rightarrow \int x^\alpha dx = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \text{ falls } \alpha \in \mathbb{N} \setminus (-\infty, 0) \text{ und } (0, \infty)$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad \text{auf } (-\infty, 0) \text{ und } (0, \infty)$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \int \cos x dx = \sin x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x, \int \cosh x dx = \sinh x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

Rechenregeln für unbestimmte Integration

Wir treffen die folgende Verabredung

- I. Die folgenden Formeln gelten für alle Intervalle I auf denen die rechten Seiten existieren.
- II. Treten Ableitungen auf, so wird deren Existenz stillschweigend vorausgesetzt.
- III. F bezeichnet durchgehen eine Stammfunktion zu f .

Dann gelten:

$$\int \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n dx = \alpha_1 \int f_1 dx + \dots + \alpha_n \int f_n dx$$

$$\int f g dx = F g - \int F g' dx$$

$$\int (f \circ g) g' dx = F \circ G \quad \left(\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) \right)$$

($\otimes \otimes$)

Zwei Spezialfälle der letzten Regeln sind:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)|$$

Substitutionsregel II.1:

Sein $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(I_0) = I$ mit $g(x) \neq 0$ ($x \in I_0$) und $(f \circ g)g'$ besitze auf I_0 eine Stammfunktion Φ . Dann existiert eine Umkehrung g^{-1} von g auf I und $F(x) = \Phi(g^{-1}(x))$ ist dort eine Stammfunktion von f , kurz

$$\int f(x) dx = \left[\int f(g(t)) g'(t) dt \right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Daher sei

$$[\varphi(t)]_{t=\psi(x)} := \varphi(\psi(x))$$

Bew. folgt 1. Seite

Regeln: Man setze $\int f(x)dx$ einfach $x = g(t)$; $dx = g'(t)$ und werte das entstehende Integral $\int f(g(t))g'(t)dt$ aus und im Ergebnis ersetzt man t durch $g^{-1}(t)$.

Beispiel II.2: $\int \frac{dx}{\sin x}$ Die Substitution $x = \arctan t$ liefert $g(t) = 2 \arctan t$

$$\text{mit } dx = \frac{2}{1+t^2} dt \text{ und } \sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| \text{ auf } (-\infty, 0) \text{ und } (0, \infty)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\int \frac{dt}{t} \right]_{t=\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \text{ auf } (-\pi, 0) \text{ und } (0, \pi)$$

Beispiel II.3: $\int \cos(3x+1)dx \Rightarrow t = 3x+1, x = \frac{t-1}{3}, dx = \frac{1}{3} dt$

$$\frac{1}{3} \int \cos(t)dt = \frac{1}{3} \sin(t)$$

Also ist

$$\int \cos(3x+1)dx = \left[\frac{1}{3} \sin(t) \right]_{t=3x+1} = \frac{1}{3} \sin(3x+1)$$

Beispiel II.4: $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int f \cdot f' dx$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x, \text{ da } \int fF dx = FF - \int Ff dx \Rightarrow 2 \int Ff dx = (F)^2$$

Die Partialbruchzerlegung

Für die Integration einer echten gebrochenen rationalen Funktion ist deren Zerlegung in Partialbrüche sehr wichtig.

Gehen wir aus von einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Die Polynome haben

keinen gemeinsamen Polynomfaktor. Des weiteren gelte $\text{grad } p(x) < \text{grad } q(x)$.

Kochrezept zu Berechnung einer Partialbruchzerlegung

1.Schritt: Bestimmen der Produktdarstellung von $q(x)$.

$q(x) = a(x-x_1)^k \cdot \dots \cdot (x-x_n)^{k_n} \cdot q_1(x)^{l_1} \cdot \dots \cdot q_m(x)^{l_m}$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen x_1, \dots, x_n und den Vielfachheiten k_1, \dots, k_n

und verschiedenen quadratischen Polynomen $a_i(x)$, die in R keine Nullstellen besitzen, mit Potenzen l_i ($1 \leq i \leq m$).

2.Schritt:

Partialbruchansatz

Zu jedem Linearfaktor $(x - x_i)$ von $q(x)$ der Vielfachheit k_i und zu jedem quadratischem Faktor $q_i(x)$ der Vielfachheit l_i wählt man nun als Ansatz Funktion der Form

$$\frac{A_{i,1}}{(x-x_i)}, \frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2}, \dots, \frac{A_{i,k_i}}{(x-x_i)^{k_i}}, \frac{B_{i,1} + C_{i,1}}{q_1(x)}, \frac{B_{i,2} + C_{i,2}}{q_2(x)^2}, \dots, \frac{B_{i,l_i} + C_{i,l_i}}{q_i(x)^{l_i}}$$

Diese Funktionen werden als Partialbrüche von $\frac{p(x)}{q(x)}$ bezeichnet. Ziel ist

es nun $\frac{p(x)}{q(x)}$ als Summe solcher Partialbrüche darzustellen

3.Schritt:

Koeffizientenbestimmung

$$\frac{x^2 - 1}{(x-3)^3} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3} : \text{Multiplikation mit dem Nenner } q(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 - 1 &= A_1(x-3)^2 + A_2(x-3) + A_3 \\ &= A_1 x^2 + x(-6A_1 + A_2) + (-3A_2 + A_3 + 9A_1) \end{aligned}$$

Koeffizienten vergleichen

Einsetzen bestimmter X -Werte

$$x = 3 \Rightarrow A_3 = 8$$

$$x = 0 \Rightarrow 9A_1 - 3A_2 + 8 = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow 4A_1 - 2A_2 + 8 = 0$$

Das Bestimmen der Koeffizienten kann sowohl durch Einsetzen als auch durch Gleichsetzungsmethoden geschehen. Dazu multipliziert man zuerst die Ansatzgleichung mit $q(x)$. Daraus ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für $A_{i,j}, B_{r,s}, C_{r,s}$

Beispiel:

Betrachten wir exemplarisch

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x-1)^2(x+1)}$$

Ansatzgleichung:

$$\frac{x^2 + 3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_{1,1}}{(x-1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{A_{2,1}}{(x+1)} \mid \cdot (x-1)^2(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = A_{1,1}(x-1)^2(x+1) + A_{1,2}(x+1) + A_{2,1}(x-1)^2$$

$$x = -1: 4 = 4A_{2,1} \quad x = 1: 4 = 2A_{1,2} \quad x = 0: 3 = -A_{1,1} + 2 + 1$$

$$1 = A_{2,1}$$

$$2 = A_{1,2}$$

$$\Rightarrow A_{1,1} = 0$$

Integration einer rationalen Funktion $R(x)$

1. Schritt: Mittels Partialbruchzerlegung wird $R(x)$ dargestellt in der Form:

$$f(x) = g(x) - \frac{p(x)}{g(x)}$$

mit dem ganzen Polynom $g(x)$ und Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ die keinen gemeinsamen Polynomanteil besitzen.

2. Schritt: Man bestimmt die Partialbruchzerlegung von $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Dabei verwendet man die folgende Formel

$$\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} \quad (k > 1)$$

Im weiteren setzen wir $p^2 - 4q < 0$ voraus

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}$$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{2x + p}{(k-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{k-1}}$$

$$+ \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q - p^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k-1}}, \quad (k > 1)$$

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx = -\frac{a}{2(k-1)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}$$

Integration von $R(e^{ax})$

Es bezeichnet R eine rationale Funktion. In einem Integral der Form $\int R(e^{ax}) dx$ führt die

Substitution $t = e^{ax}$, d.h. $x = \frac{1}{a} \ln t$, $dx = \frac{dt}{at}$ auf

$$\int R(e^{ax}) dx = \left[\int R(t) \frac{dt}{at} \right]_{t=e^{ax}}$$

Beispiel:
$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot t} \right]_{t=e^x} = \left[\int \frac{dt}{1+t^2} \right]_{t=e^x}$$

$$= [\arctan t]_{t=e^x} - \arctan e^{-x}$$

Mit $R(x, y)$ soll im Folgenden ein rationaler Ausdruck in x und y sind, d.h. $R(x, y)$ entstehen aus x, y und Koeffizienten allein durch Multiplikation, Substitution, Addition und Division.

Integration von $R(\sin x, \cos x)$

Man substituiert

$$x = 2 \arctan t \quad (t = \tan \frac{x}{2}), \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

und es gilt

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

Beispiel:
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left[\int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \right]_{t=\tan \frac{x}{2}} = \left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_{t=\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right|$$

Integration von $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}), (a \neq 0)$

Man substituiert mit $u = \alpha x + \beta, dx = \frac{1}{\alpha} du$, so daß man eine Normalform der Form

$$\int R(u, \sqrt{u^2 + 1}) dx, \int R(u, \sqrt{u^2 - 1}) dx, \int R(u, \sqrt{1 - u^2}) dx$$

Die Substitution $u = \sinh t, u = \cosh t$ bzw. $u = \sin t$ führt auf eine der Bekannten und schon behandelten Typen.

Beispiel:
$$\int \sqrt{4x^2 + 12x + 5} dx = \int \sqrt{\underbrace{\frac{4}{\alpha^2} (\alpha x + \beta)^2}_{4x^2 + 8\frac{\beta}{\alpha}x + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}} + \underbrace{\left(\frac{12}{\alpha} - \frac{8\beta}{\beta}\right)(\alpha x + \beta) + 5 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\beta}{\alpha}}_{12x + 12\frac{\beta}{\alpha} - 8\frac{\beta}{\alpha}x - 8\frac{\beta^2}{\alpha^2}}}$$

$$= 4x^2 + 8\frac{\beta}{\alpha}x + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad 12x + 12\frac{\beta}{\alpha} - 8\frac{\beta}{\alpha}x - 8\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$12 = 8\frac{\beta}{\alpha} + \lambda a \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(12 - 8\frac{\beta}{\alpha})$$

$$5 = a\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 12\frac{\beta}{\alpha} - 8\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \lambda \Rightarrow \lambda = 5 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{4}{\alpha^2} u^2 + \underbrace{\left(\frac{12}{\alpha} - 8\frac{\beta}{\alpha}\right)}_{12\frac{\beta}{\alpha} - 8\frac{\beta^2}{\alpha^2}} u + \left(5 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\beta}{\alpha}\right) \right) du \right]_{u=\alpha x + \beta}$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \beta$$

$$(\alpha > 0)$$

$$\left(\alpha = \frac{2}{3}\beta\right)$$

$$= \left[\sqrt{\frac{a}{\alpha^3} \int u^2 + \frac{\alpha^2}{4} \left(5 + 4 \frac{9}{4} - 12 \frac{3}{2}\right) du} \right]_{u=\alpha x + \frac{3}{2}\alpha}$$

$$= \left[\frac{2}{\alpha^3} \int \sqrt{u^2 - \alpha^2} du \right]_{u=\alpha\left(x+\frac{3}{2}\right)} \stackrel{\alpha=1}{=} \left[2 \int \sqrt{u^2 - 1} du \right]_{u=\frac{2x+3}{2}}$$

$$= 2 \left[\int \sqrt{\cosh^2(t) - 1} \cdot \sinh t dt \right]_{t=\operatorname{arccosh}\left(\frac{2x+3}{2}\right)}$$

$$u = \cosh t$$

$$du = \sinh t dt$$

$$t = \operatorname{arccosh}(u)$$

$$= 2 \left[\int \sinh^2 t dt \right]_{t=\operatorname{arccosh}\left(\frac{2x+3}{2}\right)} =$$

$$\left\langle \frac{1}{2} \sinh x \cosh x - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh^2 x - 1}{\sinh^2 x} + \sinh^2 x \right) = \frac{1}{2} (2 \sinh^2 x) = \sinh^2 x \right\rangle$$

$$= \left[\sinh t \cosh t - t \right]_{t=\operatorname{arccosh}\left(\frac{2x+3}{2}\right)}$$

Integration von $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \delta}}\right), \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Substitution $t = \sqrt[k]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \delta}}$, d.h.

$$x = \frac{\delta t^k - \beta}{\alpha - \gamma t^k}, \quad dx = k(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{t^{k-1}}{(\alpha - t^k \gamma)^2} dt$$

Bsp.: $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} dx = \left[\int \frac{1-t}{t^2-t} 2t dt \right]_{t=\sqrt{x}} \quad t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2t dt$

$$= \left[2 \int \frac{1-t}{1+t} dt \right]_{t=\sqrt{x}} = [4 \ln|t+1| - 2t]_{t=\sqrt{x}} = 4 \ln|\sqrt{x}+1| - 2\sqrt{x}$$

Das Riemannsches Integral

Betrachten wir folgende Situation: F sei diffb. auf $[a, b]$ und $f := F'$ sei ebenso bekannt wie der Anfangswert $F(a)$ kann man $F(b)$ bestimmen.

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$F(b) = F(a) + f(\eta)(b-a) \quad \eta \in (a, b)$$

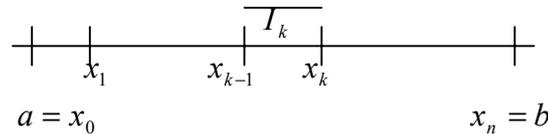
Aber wie groß ist η . Wenn sich f nicht sehr ändert, gilt zumindest für bel. $\xi \in (a, b)$

$$F(b) = F(a) + F(\xi)(b - a)$$

Verfeinerung: Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ sind eine beliebige Zerlegung Z des Intervalls $I := [a, b]$. Diese Zerlegung berechnen wir mit $\{x_0, \dots, x_n\}$, $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ soll

k -te Teilintervall von Z mit Länge $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ sein, und $|Z| = \max_{k=1}^n |I_k|$ das

Feinheitsmaß.



Man beachte

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - \underbrace{F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) \quad (\text{Summierung der Teilstücke}) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt nun für geeignete $\eta_k \in I_k$

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\eta_k) |I_k|$$

Somit

$$\otimes \quad F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) |I_k|$$

Betrachten wir nun eine Folge von Zerlegungen

$$Z_j = \{x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)}\} \text{ mit } |Z_j| \rightarrow 0$$

und zu jedem Z_j einen Zwischenvektor

$$\xi_j := (\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \dots, \xi_{n_j}^{(j)}) \text{ mit } \xi_k^{(j)} \in (x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)})$$

und setzen

$$S(Z_j, \xi_j) := \sum_{k=1}^{n_j} f(\xi_k^{(j)}) |I_k^{(j)}| \quad (\text{Riemann-Summe})$$

Wie in \otimes gibt es für jedes j einen Zwischenvektor η_j mit

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n_j} f(\eta_k^{(j)}) |I_k^{(j)}| = F(a) + S(Z_j, \eta_j) \\ &= F(a) + \lim_{j \rightarrow \infty} S(Z_j, \eta_j) \end{aligned}$$

Sei f im Folgenden stetig auf $I = [a, b]$, dann ist f glm. stetig. Es gilt $\forall x, y \in I$ mit

$$|x - y| < \delta \text{ stets } |f(x) - f(y)| < \varepsilon := \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

für jede Zerlegung Z mit $|Z| < \delta$ und

zugehörigem Zwischenvektor ξ gilt dann

$$|F(b) - F(a) - S(Z, \xi)| = \left| \sum_{k=1}^n (f(\eta_k) - f(\xi_k)) |I_k| \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n |I_k| = \varepsilon$$

Zu einer beliebigen Riemannfolge $S(Z, \xi_j)$ und obigem δ gibt es ein j_0 , so daß für

$j > j_0$ stets $|Z_j| < \delta$ und dann auch $|F(b) - F(a) - S(Z_j, \xi_j)| < \varepsilon$ ausfällt, d.h. für beliebige Riemannfolgen konvergiert $S(Z_j, \xi_j)$ (gegen $F(b) - F(a)$).

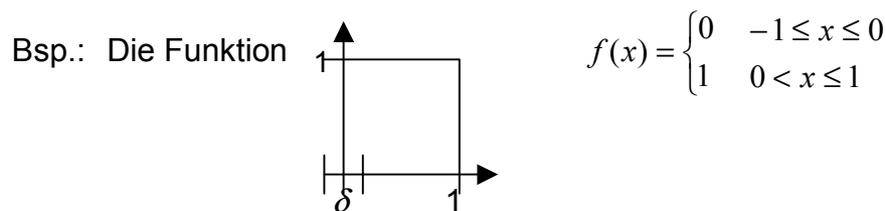
Definition: Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, wenn jede Riemannfolgen $S(Z_j, \xi_j)$ gegen einen Grenzwert konvergiert. Diesen gemeinsamen Grenzwert bezeichnet man mit dem Symbol $\int_a^b f(x) dx$ und nennt ihn das Riemannintegral von f über $[a, b]$.

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Besitzt F auf dem Intervall $[a, b]$ eine stetige, aber auch R-integrierbare Ableitung, so ist

$$\begin{array}{l}
 F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x) dx \\
 \text{und somit } \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad (= F|_a^b)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x) dx \\ \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} F(b) \text{ mittels} \\ \text{Grenzwertprozess} \end{array}$$

(falls F bekannt ist, ist $\int_a^b F'(x) dx$ einfach zu berechnen)



Für eine beliebige Zerlegung Z von $[-1, 1]$ mit $|Z| \leq \delta$ gilt

$$|S/Z, \xi - 1| \leq \delta \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx$$

ist R-integrierbar.

Frage Existiert eine Stammfunktion?

Gesucht F mit $F'(x) = f(x) \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

$$F(x) = \begin{cases} \alpha & -1 \leq x < 0 \\ x + \beta & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = F|_{-1}^1 = (1 + \beta) - \alpha = 1 + (\beta - \alpha)$$

Satz: Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist dort auch R-integrierbar.

Ungleichung für Riemann-Integrale

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |b - a| \|f\|_{\infty} = (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Beweis: oBdA sei $a < b$. Für jede Riemann-Summe gilt

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \|f\|_{\infty} \left| \sum_{k=1}^n I_k \right| = \|f\|_{\infty} (b - a)$$

Zweiter Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Jedes $f \in C[a, b]$ besitzt eine Stammfunktion auf $[a, b]$, z.B. die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

Bisher haben wir zu allen Funktionen das Integral in einer geschlossenen Form darstellen können, aber nicht zu allen Funktionen muß sich die aus elementaren Funktionen darstellen lassen. In den Fällen liefert das Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

neue Funktionen.

a) Integralsinuns $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq \infty)$

Man beachte $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

b) Dilogarithmus $Di(x) = -\int_1^x \frac{\log t}{t-1} dt \quad (0 \leq x \leq \infty)$

c) Fehlerfunktion $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (0 \leq x \leq \infty)$

d) Elliptische Integrale und deren Umkehrfunktion

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (0 \leq x \leq \infty)$$

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

Vorschläge und Ideen zur Berechnung obiger Funktionen

° Für einige Spezielle x lassen sich obige Funktionen analytisch bestimmen, z.B.

$$Di(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

° Reihenentwicklung nach endliche vielen Termen abbrechen, z.B.

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots$$

$$\int_0^x 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots - \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \dots \pm \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \Big|_0^x$$

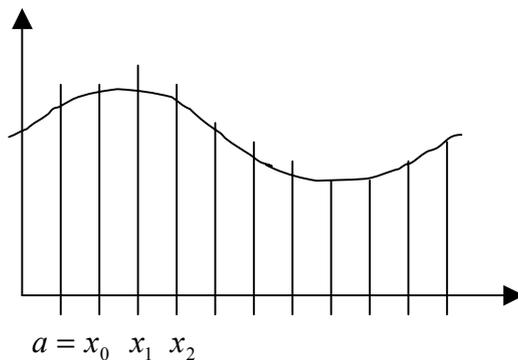
$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \dots$$

Vorsicht! Konvergenzradius der Reihenentwicklung beachten;
Vertauschen der Beiden Grenzprozesse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) dx$$

Quadraturverfahren

z.B. summierte Mittelpunktsformel



$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + \underbrace{\frac{b-a}{4n} \sup_{\xi \in (a,b)} f'(\xi)}_{\text{Fehler } O(n^{-1})}$$

Partielle Integration (Produktintegral)

Sei f stetig und g stetig diffbar auf (a, b) .

Sei F eine Stammfunktion zu f auf (a, b) . Dann gilt:

$$\int_a^b fg dx = Fg \Big|_a^b - \int_a^b Fg' dx$$

Bsp.: $\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b$

$$\int_a^b \cos^2 x dx = \int_a^b \underbrace{\cos x}_f \cdot \underbrace{\cos x}_g dx = \underbrace{\sin x}_F \cdot \underbrace{\cos x}_g \Big|_a^b + \int_a^b \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} dx = \sin x \cos x \Big|_a^b + x \Big|_a^b - \int_a^b \cos^2 x dx$$

$$\int_a^b \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(\sin x \cos x \Big|_a^b + x \Big|_a^b \right)$$

$$\int_a^b \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x \Big|_a^b + (n-1) \int_a^b \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \cos^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow n \int_a^b \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x \Big|_a^b + (n-1) \int_a^b \cos^{n-2} x dx$$

$$\int_a^b \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} \Big|_a^b + \frac{n-1}{n} \int_a^b \cos^{n-2} x dx$$

Substitutionsregel: Es gelten

- i) f stetig in (a, b) und g stetig diffb. auf (a, b)
- ii) Es ist $g((a, b)) \subset (a, b)$ und $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$

Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt$$

$$\left(x = g(t), \frac{dx}{dt} = g'(t) \right)$$

Handhabung von R-Integralen

Es bezeichne $R[a, b]$ die Menge der R-integrierbaren Funktionen über dem Intervall $[a, b]$.

Satz: Mit $f, g \in R[a, b]$ gilt auch $f + g \in R[a, b]$ und jedes Vielfache $cf \in R[a, b]$ ($c \in R$).

Weiter gilt

$$\int_a^b f + g dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad \text{bzw.}$$

$$\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$$

Satz: Seien $f, g \in R[a, b]$ mit $f \geq g$. Dann gilt

$$\int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx$$

Insbesondere gilt für $f \geq 0$: $\int_a^b f dx \geq 0$

Satz: Ein auf $[a, b]$ R-integrierbare Funktion ist dort notwendig beschränkt.

Beschäftigen wir uns nun mit der Frage, wie man einer Funktion ansehen kann, ob sie eine Stammfunktion besitzt bzw. R-integrierbar ist.

Wir liefern im Folgenden hinreichend Integrabilitätskriterien.

Satz: Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist dort auch R-integrierbar, d.h. $C[a, b] \subset R[a, b]$.

Darbouxsche Integrale

f sei beschränkt auf $[a, b]$, Z irgend eine Zerlegung von $[a, b]$ mit den Teilintervallen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

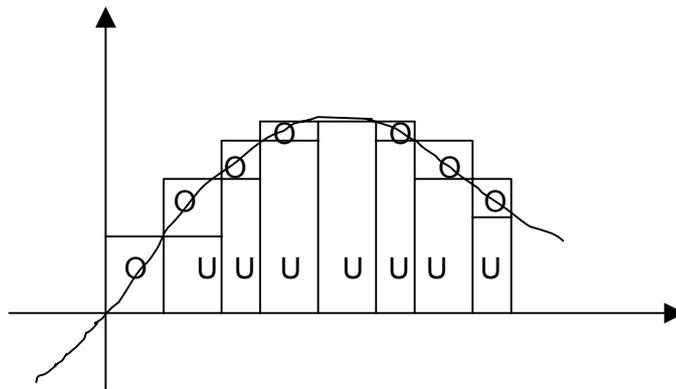
Mit

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) \qquad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$$

bilde man die Unter- und Obersumme

$$U(f, Z) := \sum_{k=1}^n m_k |I_k|, \quad O(f, Z) := \sum_{k=1}^n M_k |I_k|$$

Offenbar gilt stets $U(f, Z) \leq O(f, Z)$



$$\hat{O} = O(f, Z)$$

$$\hat{U} = U(f, Z)$$

$B[a, b]$ sei die Menge der Funktionen mit beschränkter Variation

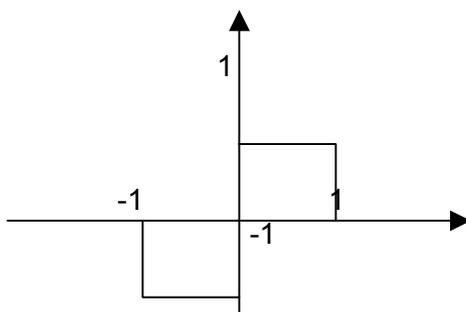
z.B. $x^\alpha \notin B[a, b]$ für $\alpha < 0$

Satz: $f \in B[a, b]$ ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon < 0$ eine Zerlegung Z mit

$$O(Z) - U(Z) < \varepsilon$$

gilt

z.B.



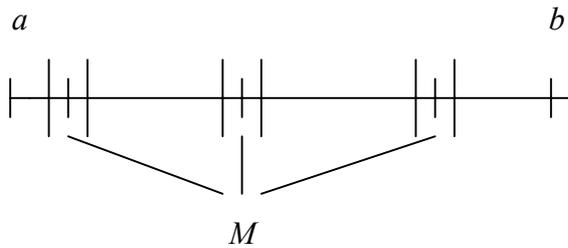
Offensichtlich gilt $f \in B[-1, 1]$ und für jede Zerlegung bei der 0 das Ende eines Teilintervalls ist, gilt $O(Z) - U(Z) = 0 < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$

Satz: Genau die Funktionen aus $R[a, b]$ sind Darboux-integrierbar.

Bem.: D-Integrierbarkeit ist eine Darstellung der R-Integrierbarkeit.

Satz: Jede auf $[a, b]$ monotone Funktion ist auf $[a, b]$ R-integrierbar.

Def.: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon < 0$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene Intervalle I_1, I_2, \dots gibt, die M überdecken und deren Längensumme $\sum |I_k| \leq \varepsilon$ gilt.



Betrachte zu jedem $\xi \in M$ das Teilintervall $\xi \in \left[\xi - \frac{\varepsilon}{24}, \xi + \frac{\varepsilon}{24} \right]$ (n Anzahl der Elemente in M). Dann gilt $|I_k| = \frac{\varepsilon}{n}$ und somit $\sum |I_k| \leq \varepsilon$.

Lebesguesche Integrierbarkeitskriterium

Die Funktion f ist genau dann auf $[a, b]$ R-integrierbar, wenn sie dort beschränkt und fast überall stetig ist, d.h. die Menge der Unstetigkeitsstellen ist eine Nullmenge.

Satz: $\int_a^b f dx$ existiert immer dann, wenn f auf $[a, b]$ beschränkt und dort an höchstens abzählbar vielen Stellen unstetig ist.

Satz: Unterscheidet sich f und $g \in R[a, b]$ nur an endlich vielen Stellen des Intervalls $[a, b]$, so gehört auch f zu $R[a, b]$ und es gilt $\int_a^b f dx = \int_a^b g dx$

Bem.: Beim Integrieren kommt es nicht auf endlich viele Funktionswerte nicht an!

Satz: Die Funktion $f \in R[a, b]$ ist auf jedem Teilintervall von $[a, b]$ integrierbar. Sind a_1, a_2, a_3 irgendwelche Punkte in $[a, b]$, so gilt die Gleichung

$$\int_{a_1}^b f dx = \int_{a_1}^{a_3} f dx + \int_{a_3}^{a_2} f dx$$

Bem.: Setze $a_3 = a_1 \Rightarrow \int_{a_1}^{a_2} f dx = \int_{a_1}^{a_1} f dx + \int_{a_1}^{a_2} f dx \Rightarrow \int_{a_1}^{a_1} f dx = 0$

Satz: Mit $f, g \in [a, b]$ liegen auch die folgenden Funktionen in $R[a, b]$:

$$|f|, f^+ (f^+(x) = \max(0, f(x))), f^-, \max(f \cdot g), \min(f \cdot g), f \cdot g$$

Gilt $|g(x)| \geq \alpha > 0$ auf $[a, b]$. Dann gehört auch $f/g \in R[a, b]$

Wieso genügt nicht $|g(x)| > 0$, z.B. $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 17, & x = 0 \end{cases} \quad 1 \in R[0,1], g \in R[0,1]$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f $[a, b]$ \mathbb{R} -integrierbar, so gibt es eine wohlbestimmte Zahl $\inf f \leq \mu \leq \sup f$ mit

$$\int_a^b f dx = \mu(b-a).$$

Für stetiges f ist $\mu = f(\xi)$ mit $\xi \in (s, b)$.

Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} + e^{-0} = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} + 1 = 1$$

uneigentliches Integral

Integrale über unbeschränkte Intervalle

Ist die Funktion f für jedes $f > a$ auf $[a, t]$ \mathbb{R} -integrierbar und strebt $\int_a^t f dx \rightarrow I$ für $t \rightarrow \infty$ so

Sagt man, das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f dx$ konvergiert oder existiert und habe den

$$\text{Wert } I, \text{ kurz es sei } \int_a^{\infty} f dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f dx$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral wird als divergent bezeichnet.

Bsp. a) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, da $\int_0^t e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t} \rightarrow 1$

b) $\int_1^t x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \ln t, & \alpha = 1 \end{cases}$

für $t \rightarrow \infty$ folgt

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx \text{ konvergiert genau dann, wenn } \alpha > 1 \text{ gilt.}$$

Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Das Integral $\int_0^{\infty} f dx$ konvergiert genau dann, wenn folgende Cauchybedingung erfüllt

ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Stelle s_0 so, daß für $t > s > s_0$ stets $\left| \int_s^t f dx \right| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Bsp.: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \left(= \underset{\text{Integral sin us}}{Si(\infty)} \right)$ ist konvergent. $0 < s < t$ gilt

$$\int_s^t \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_s^t - \int_s^t (-\cos x) \left(\frac{1}{x^2} \right) dx \text{ und somit}$$

$$\left| \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \int_s^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{t} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s}$$

$$\text{mit } \left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx$$

Dies bleibt für alle $s > s_0 := \frac{2}{\varepsilon}$ gewiß kleiner als ε .

Es gilt ferner

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

verschiedene Konvergenzkriterien

Satz: Es sei $f \geq 0$.

$$\int_a^{\infty} f dx \Leftrightarrow \exists k > 0 \forall t > a : \int_a^t f dx < k$$

Satz: Ein absolut konvergentes Integral $\int_0^{\infty} f dx$ ist erst recht konvergent und es gilt:

$$\left| \int_a^{\infty} f dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f| dx$$

Majorantenkriterium: Ist $|f| < g$ auf $[0, \infty]$ und konvergiert $\int_a^{\infty} g dx$, so ist $\int_a^{\infty} f dx$ konvergent.

Minorantenkriterium: Ist $0 \leq h \leq f$ auf $[0, \infty]$ und divergiert $\int_a^{\infty} h dx$, so muß auch $\int_a^{\infty} f dx$ divergieren.

Grenzwertkriterium: Sind f und g positiv auf $[1, \infty)$ und strebt $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \mapsto \infty$ gegen einen positiven Wert, so haben die Integrale $\int_a^{\infty} f dx$ und $\int_a^{\infty} g dx$ das selbe Konvergenzverhalten.

Strebt $\frac{1}{g} \rightarrow 0$ so kann man aus der Konvergenz von $\int_a^\infty g dx$ auf die des Integrals schließen.

Integrale von unbeschränkten Funktionen

Ist f in $[1, \infty)$ unbeschränkt, strebt aber

$$\int_a^t f dx \rightarrow I \text{ für } t \rightarrow b^-$$

so sagt man das uneigentliche Integral konvergiert bzw. existiert und habe den Wert I . Kurz

$$\int_a^b f dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f dx$$

Bsp.: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ da $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t \rightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ existiert nicht, da z.B. das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

Cauchy-Hauptwert

Betrachtet man beispielsweise das Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x-c} \quad (a < c < b)$$

so mag man sich eine Verallgemeinerung des Integralbegriffs wünschen, da zwar

nicht $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} \frac{1}{x-c} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon}^b \frac{1}{x-c} dx$ existiert, jedoch $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{1}{x-c} dx - \int_{c+\epsilon}^b \frac{1}{x-c} dx \right)$.

Dies bezeichnet man als Cauchy-Hauptwert oder part finite. Allgemein bezeichnet für eine Funktion f mit einer Unstetigkeitsstelle $c \in (a, b)$

$$\text{p.f. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right)$$

den Cauchy-Hauptwert.

Bsp.: $(a < c < b)$

$$\begin{aligned} \text{p.f. } \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left[\ln|x-c| \right]_a^{c-\epsilon} + \ln|b-c| - \ln|\epsilon| \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\ln|\epsilon| - \ln|a-c| + \ln|b-c| - \ln|\epsilon| \right) = \ln \left| \frac{b-c}{a-c} \right| = \ln \frac{b-c}{c-a} \end{aligned}$$

Bem.: Für den Hauptwert eines Integrals über ein beschränktes oder unbeschränktes Gebiet gilt folgendes:

Existiert das uneigentliche Integral, so existiert auch sein Hauptwert und beide sind gleich. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Einschub: Ein zum Cauchy'schen Hauptwert äquivalentes gibt es auch bei Integralen über unbeschränkte Intervalle. Hier berechnet man

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx,$$

falls er existiert, als Hauptwert des Integrals und bezeichnet ihn mit

$$\text{p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Bsp. zu Bem.: unbeschränktes Intervall

Da für den Integranden $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$

$$\text{und daher} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{Es gilt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\delta} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{-\delta}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \lim_{\delta \rightarrow \infty} \arctan \delta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\text{Also ist p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Konvergenz-Test

Da die Aussagen über die Konvergenz bzw. Divergenz eines Integrals bei der Funktion x^α recht eindeutig sind, wird sie gerne als Testfunktion verwendet.

Vergleichskriterium

Seien f stetig auf $[a, \infty)$, g auf $[a, b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$

Dann gilt $|f(x)| \leq kx^\alpha$, $a \leq x < \infty$, $a < -1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ konvergiert

$|g(x)| \leq kx^\alpha$, $0 < x \leq b$, $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \int_0^b g(x) dx$ konvergiert

Bsp.: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ Da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist der Integrand bei $x = 0$ durch 1

zu ersetzen.

Da $\int_0^c f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^c f(x) dx$ gilt, braucht nur das zweite Integral untersucht werden.

Partielle Integration:
$$\int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = - \underbrace{\frac{1}{x} \cos x \Big|_1^c}_{\substack{c \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0}} + \int_0^c \cos x \left(\frac{1}{-x^2} \right) dx$$

Für $\int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx$ liefert das Vergleichskriterium

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{|\cos x|}{|x^2|} \leq \frac{1}{|x^2|} \leq x^{-2}, x \geq 1$$

Also konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, was wir schon mittels Cauchy'schen Konvergenzkriterium gezeigt haben.

Motivation und Definition des Riemann-Stieltjessche-Integrals

Das Riemann-Stieltjessche-Integral ist eine Verallgemeinerung des Riemannsches Integrals. Betrachten wir die folgenden Motivation.

Die Punkte x_1, \dots, x_n der x-Achse seien mit den Massen m_1, \dots, m_n belegt. Dann nennt man

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

den Schwerpunkt des Massensystems.

Formulieren wir nun den Schwerpunkt nun in einer anderen Weise. Dazu definieren wir eine Belegungsfunktion $m(x)$ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ so:

$m(a)$ sei 0 und $m(b)$ bedeute die im Intervall $[a, b]$ vorhandene Masse. Für die diskrete

Belegung der x-Achse mit Masse $m(x) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i$ mit $x \in [x_{k-1}, x_k]$ und $m(b) = \sum_{i=1}^n m_i$

Es bezeichne $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ einen Zwischenvektor zu der Zerlegung Z , d.h.

$$\xi_j \in (x_{j-1}, x_j) \quad j = 1, \dots, n$$

Aufgrund der obigen Betrachtung liefert

$$\tilde{x} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \xi_k (m(x_k) - m(x_{k-1}))$$

Läßt man das System Σ um die y-Achse rotieren, so wird man bei dem Versuch das Trägheitsmoment von Σ zu bestimmen auf Zerlegungssummen der Form

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 (m(x_k) - m(x_{k-1}))$$

und deren Grenzwert geführt

Diese Beispiel gibt Anlaß zu den folgenden Definitionen

Definition: Es sei $f, \alpha : [a, b] \Rightarrow R$

Ist $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein zugehöriger Zwischenvektor, so heißt

$$S_\alpha(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

eine Riemann-Stieltjessche-Summe.

Ist (Z_j) eine Zerlegungsfolge, so bezeichnet man die Folge der Summe

$S_\alpha(f, Z, \xi)$ als die RS-Folge.

Strebt eine RS-Folge gegen einen und damit gegen ein und den selben Grenzwert, so sagt man, f sei auf $[a, b]$ bzgl. α RS-integrierbar. Den gemeinsamen Grenzwert aller RS-Folgen bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x), \int_a^b f d\alpha(x), \int_a^b f d\alpha$$

und nennt ihn das RS-Integral von f über $[a, b]$ bzgl. des Integrator α

Satz: Mit f und g liegt auch die Summe $f + g$ und jedes Vielfache cf in $R[a, b]$.

Ferner ist f auch bzgl. $c\alpha$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f + g) d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha$$

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$$

Ist f bzgl. α und bzgl. β integrierbar, so ist f auch bzgl. $\alpha + \beta$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f d(\alpha + \beta) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta$$

Satz: Liegt f in $R_\alpha[a, b]$, so liegt umgekehrt α in $R_f[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = [f\alpha]_a^b$$

Wir treffen folgende Vereinbarung

$$\int_a^b f d\alpha = 0 \text{ und } \int_b^a f d\alpha := - \int_a^b f d\alpha$$

Satz: ist $f \in R_\alpha[a, b]$ und sind $a_1, a_2, a_3 \in [a, b]$ so gilt

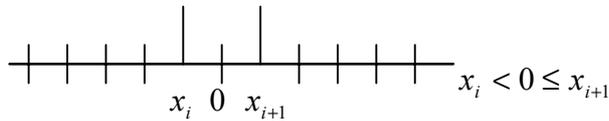
$$\int_{a_1}^{a_2} f d\alpha = \int_{a_1}^{a_3} f d\alpha + \int_{a_3}^{a_2} f d\alpha$$

Bem.: Wenn f bzgl. α auf $[a, b]$ und auf $[b, c]$ RS-integrierbar ist, braucht

$$\int_a^c f d\alpha \text{ nicht zu existieren!}$$

Bsp.: $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



$$S\alpha(f, Z, \xi) = f(\xi^*)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)) = f(\xi^*), \xi^* \in (x_i, x_{i+1})$$

$$\xi^* > 0, |x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0, S\alpha \rightarrow 1$$

$$\xi^* < 0, |x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0, S\alpha \rightarrow 0$$

Definition: Die Funktion g heißt von beschränkter Variation auf $[a, b]$, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so daß für jede Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ stets

$$V(g, Z) := \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M$$

bleibt. In diesem Fall wird die reelle Zahl $V_a^b(g) := \sup V(g, Z)$ die totale Variation von g genannt.

Die Menge aller Funktion auf $[a, b]$ mit beschränkter Variation bezeichnet man kurz mit $B/[a, b]$.

Fundamentalsatz für RS-Integrale

Ist die Funktion $f \in B[a, b]$ bzgl. $\alpha \in B/[a, b]$ auf $[a, b]$ RS-integrierbar, so gilt

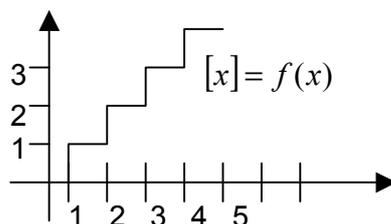
$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(\alpha)$$

Satz: Sind die Funktion f und die Ableitung α' von α R-integrierbar auf $[a, b]$,

$$\text{so ist } \int_a^b f d\alpha \text{ vorhanden und } = \int_a^b f \alpha' dx$$

Satz: Sei α Treppenfunktion auf $[a, b]$, die genau an den Stellen c_1, \dots, c_n Sprünge der Größe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bezeichnen. Dann ist für jedes $f \in C[a, b]$ stets

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=1}^n f(c_k) \alpha_k$$



$$\begin{aligned}
\text{Bsp.: } \int_0^t e^x d \sin x &= \int_0^t e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big|_0^t + \int_0^t e^x \sin x dx \\
&= e^t \cos t - 1 + \left(e^x \sin x \Big|_0^t - \int_0^t e^x \cos x dx \right) \\
&= e^t \cos t - 1 + (e^t \sin t - 0) - \int_0^t e^x \cos x dx \\
\int_0^t e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} (e^t (\cos t) + \sin t - 1) \\
\Rightarrow \int_0^t e^x d \sin x &= \frac{1}{2} (e^t (\cos t) + \sin t - 1)
\end{aligned}$$

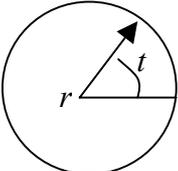
III Theorie ebener Kurven

Kurven \equiv krumme oder gerade Linien z.B. Bahn bewegter Körper, Konturen ebener Körper, Kanten räumlicher Gebilde oder Idealisierung für die dünnen Stangen, Seile.

Wege, Kurven, Bogenlänge

Betrachten wir zuerst Kurven in der Ebene.

Beispiel III.1: Ein Kreis von Radius $r > 0$ um den Ursprung O kann durch

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad \otimes$$


The diagram shows a circle centered at the origin O. A radius vector of length r is drawn from the origin to the circle, making an angle t with the positive x-axis. The angle t is indicated by an arc between the x-axis and the radius vector.

beschrieben werden. Man bezeichnet \otimes als Parameterdarstellung des Urkreises und t als zugehörigen Parameter.

Die Gleichungen \otimes werden zuerst in einer Vektorgleichung

$$\underline{x} = \gamma(t) \text{ mit } \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \quad (a \leq t \leq b)$$

geschrieben. Die durch bestimmte Mengen von Punkten \underline{x} heißt ebene Kurve $\gamma[a, b] \rightarrow R^2$ nennt man einen Weg.

Bemerkung III.2: Sein $\gamma(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\gamma^*(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}$. Dann bezeichnen die

Parametrisierungen

$x = y(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $x = y(t)$ ($0 \leq t \leq 4\pi$), $x = y^*(t)$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$) die gleiche Kurve aber parametrisieren verschiedene Wege.

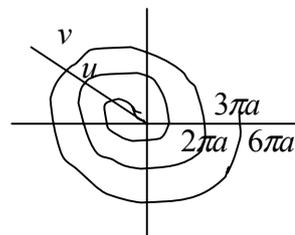
Beispiel III.3: Archimedische Spirale

$$\gamma(t) = at \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 3 \cdot 2\pi \quad (a > 0) \quad (t \text{ willkürlich beschränkt})$$

$$|u - v| =$$

$$= at \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - a(t + 2\pi) \begin{pmatrix} \cos(t + 2\pi) \\ \sin(t + 2\pi) \end{pmatrix}$$

$$= a2\pi$$



Bemerkung:

Man erkennt, daß es unmöglich ist die Spirale durch einen Funktionengraph zu beschreiben. Es gibt also Kurven, die nicht als Funktionengraph aufgefaßt werden können. Umgekehrt kann ein Funktionengraph recht leicht parametrisiert werden,

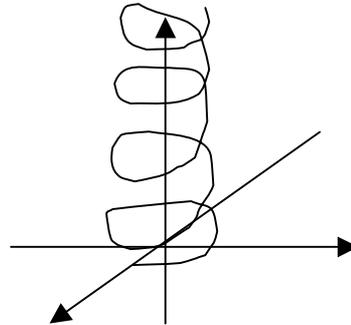
$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= f(t) \end{aligned} \quad t \in [a, b]$$

- Definition III.4:**
- i) Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Weg im \mathbb{R}^n .
 - ii) Der Wertebereich $\gamma([a, b])$ des Weges γ wird eine Kurve genannt. Die Kurve ist also der Menge der Punkte $x = \gamma(t), t \in [a, b]$. Diese Gleichung ist eine Parameterdarstellung mit den zugehörigen Parameter t .
 - iii) Eine Kurve wird häufig als Bogen bezeichnet.

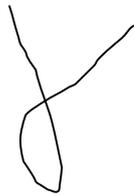
Beispiel: Schraubenlinie im \mathbb{R}^3

$$y(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ rtc \end{pmatrix} \quad t \in [a, b] \quad c > 0$$

r Radius
 $h = 2\pi c$ (Ganghöhe der Schraubenlinie)



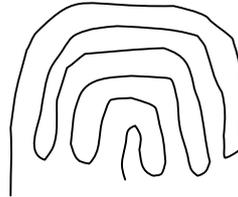
$y(a)$ $y(b)$



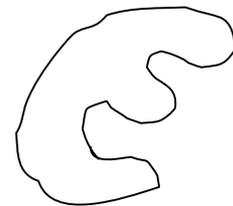
Doppelpunkt
eines Weges



$y(a) = y(b)$
geschlossener Weg



$y(a)$ $y(b)$
Jordankurve



$y(a) = y(b)$
geschlossene
Jordankurve

Zusammengesetzte Wege und Kurven

Es sei $[a, b]$ in m Teilintervalle $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ ($t_1 = a, t_n = b$) zerlegt. Darauf seien im Wege $\gamma_i [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, m$) erklärt welche die Stetigkeitsbedingung

$$\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m-1$$

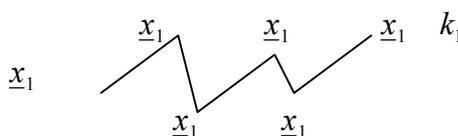
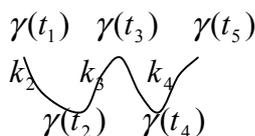
erfüllt. Durch

$$\gamma(t) := \gamma_i(t) \quad \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, \dots, m)$$

ist damit der Weg auf ganz $[a, b]$ definiert, den man die Summe der Teilfolgen nennt und durch

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m$$

symbolisiert.



Bemerkung III.8: Oft treten zusammenhängende Kurven in der Form von Streckenzügen auf, welche in der Ebene als Polynomzüge bezeichnet.

Glatte und stückweise glatte Kurven

- Definition III.9:**
- i) Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ heißt stetig diffbar, wenn die Ableitungsfunktion $\dot{\gamma}$ auf $[a, b]$ existiert und da stetig ist. $\gamma(a) = \gamma(b)$ so wird zusätzlich $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ verlangt.
 - ii) Ein Weg heißt glatt wenn er stetig diffbar. ist und seine Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ in keinem Punkt $f \in [a, b]$ verschwindet. Die von γ erzeugte Kurve wird ebenfalls als glatt bezeichnet.

Bogenlänge

Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ ein bel. Weg und $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Durch die Bildpunkte $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_m)$ denken wir und einen Streckenzug.

Die Summe

$$L_\gamma(Z) = \sum_{i=0}^m |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$



nennen wir die Länge des Streckenzuges

- Definition III.12:**
- i) Die Bogenlänge eines Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ ist def. Durch

$$L_\gamma = \sup_Z L_Z(\gamma)$$
 - ii) Ein Weg heißt rektifizierbar oder auch streckbar, wenn $L(\gamma) < \infty$ gilt.
 - iii) Man bezeichnet $L(\gamma)$ auch die Bogenlänge der Kurve.

Bsp.: a) Adventsstern



Aus jeder Strecke S_i wird in S_{i+1} die folgende Strecke

$$t^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3^2$$

$$t = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$V(s_0) = \frac{9}{4}\sqrt{3}, V(s_1) = V(s_0) + 3 \frac{V(s_0)}{9} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)V(s_0)$$

$$V(s_2) = V(s_1) + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} V(s_0) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}\right)V(s_0)$$

$$V(S_3) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5}\right) V(S_0) = \frac{1}{3} \left(3 + 1 + \frac{4}{3^2} + \left(\frac{4}{3^2}\right)^2\right) V(S_0)$$

$$V(S_{n+1}) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) V(S_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5} \leq 3$$

$$U(S_0) = 3 \cdot 3 = 9, U(S_1) = \frac{4}{3} U(S_0) = 12, U(S_2) = \frac{4}{3} U(S_1) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U(S_0)$$

$$\frac{4}{3} U(S_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n U(S_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

b) Weg: $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ mit $x = \gamma_1(t) = t$

$$\gamma = \gamma_2(t) := \begin{cases} t \cos \frac{\pi}{2} & , t \in [0,1] \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$$

Der Weg ist nicht rektifizierbar

Für die Zerlegung mit den Punkten

$$t_k = \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad t_m = 0$$

gilt

$$\gamma_2(t_k) = \frac{1}{k} \cos k\pi = \frac{(-1)^k}{k} \quad (k = 1, \dots, m-1)$$

Da $\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2), \dots$ abwechselnde Vorzeichen haben, ist die Bogenlänge zu den

Teilstücken $\gamma(t)$ mit $t \in [t_{k+1}, t_k]$ sicherlich größer als $|\gamma_2(t_k)| = \frac{1}{k}$. Also folgt

$$L_Z(\gamma) \geq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \text{ d.h. } \gamma \text{ ist nicht rektifizierbar.}$$

Definition III.10: $\dot{\gamma}(t)$ heißt der Tangenten (bzgl. γ) in t . Aus ihm wird der Tangenteneinheitsvektor gebildet

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\left| \dot{\gamma}(t) \right|}$$

Bem.: Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, schreibt man auch $T(t)$.

Satz: (Additivität der Bogenlänge)

Es sei

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m$$

γ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Teillängen $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ rektifizierbar sind.

Für die Bogenlänge gilt dann

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \dots + L(\gamma_m)$$

Bew.: Es genügt den Fall $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ zu beweisen. Der Rest folgt durch vollständige

Induktion. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zerlegt in γ_1, γ_2 mit $\gamma_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$\gamma_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ erzeugt durch Hinzunahme eines Punktes c Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, c]$ und $[c, b]$.

Damit folgt

$$L_Z(\gamma) \leq L_{Z_1}(\gamma_1) + L_{Z_2}(\gamma_2) \leq L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

$$\Rightarrow L(\gamma) \leq L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \quad \otimes$$

Umgekehrt liefern Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, c]$ und $[c, b]$ auch eine Zerlegung Z von $[a, b]$. Daraus folgt:

$$L_{Z_1}(\gamma_1) + L_{Z_2}(\gamma_2) \leq L_Z(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leq L(\gamma)$$

$$\Rightarrow L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leq L(\gamma) \quad (\otimes \otimes)$$

Aus \otimes und $(\otimes \otimes)$ folgt die Behauptung.

Satz: Jede stückweise stetig diffb. Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \dot{\gamma}(t) \right| dt$$

Bsp.: Ist durch $y = f(x)$ eine stetig diffb. reelle Funktion auf $[a, b]$, so erhält man über die Parameterdarstellung $x = t, y = f(t)$ die Länge des Graphen mittels

$$L = \int_a^b \sqrt{1^2 + (f'(t))^2} dt$$

Bew.: (Beweis der Rektifizierung siehe Literatur)

Es sei $Z = \{x_0, \dots, x_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $x_0 = a, x_m = b$. Ferner

sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$. Mit $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} L_Z(\gamma) &= \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n (\gamma_k(x_i) - \gamma_k(x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\dot{\gamma}_k(\xi_i^{(k)}) \right)^2} \cdot |I_k| \end{aligned}$$

$$\text{mit } \xi_i = \left(\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(n)} \right) \in I_i$$

$L_Z(\gamma)$ läßt sich als Riemann-Summe auffassen. Für jede Folge (Z_i) mit $|Z_i| \rightarrow 0$, wobei $|Z_i|$ die Feinheit der Zerlegung Z_i ist, liefert dies

$$\lim_{|Z_i| \rightarrow 0} L_Z(\gamma) = \int_a^b \left| \dot{\gamma}(t) \right| dt$$

Nun gilt

$$L(\gamma) = \sup_Z L_Z(\gamma)$$

Es sei nun Z_0 eine Zerlegung mit $|L(\gamma) - L_{Z_0}(\gamma)| \leq \varepsilon$, dann wählen wir eine Verfeinerung Z_1 von Z_0 mit $|Z_n| \leq \delta$.

Man beachte

$$|L - L(\gamma)| \leq \underbrace{|L - L_{Z_0}(\gamma)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|L_{Z_0}(\gamma) - L_{Z_1}(\gamma)|}_{\varepsilon} + \underbrace{|L_{Z_1}(\gamma) - L(\gamma)|}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt die Konvergenz und somit die Behauptung.

Für eine ebene stückweise diffb. Kurve mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} t \in [a, b]$ und $\dot{x} := \dot{\gamma}_1(t)$ und

$\dot{y} := \dot{\gamma}_2(t)$ schreibt man das Bogenlängenintegral auch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (\text{in 3D } L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt)$$

Bsp.: Die Schraubenlinie dargestellt

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t \quad \text{hat für die } t \in [0, S] \text{ Länge}$$

$$z = ct$$

$$L(\gamma) = \int_0^S (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^S (r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} dt = S \sqrt{r^2 + c^2}$$

Bogenlänge eines Funktionengraphen

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, f sei stetig diffb.

Parameterdarstellung

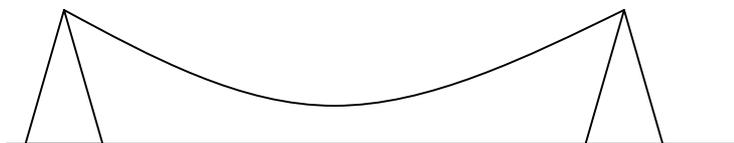
$$x = t$$

$$y = f(t) \quad t \in [a, b]$$

Die Länge des Graphens ergibt sich mittels

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad \otimes$$

Bsp.: (Kettenlinie)



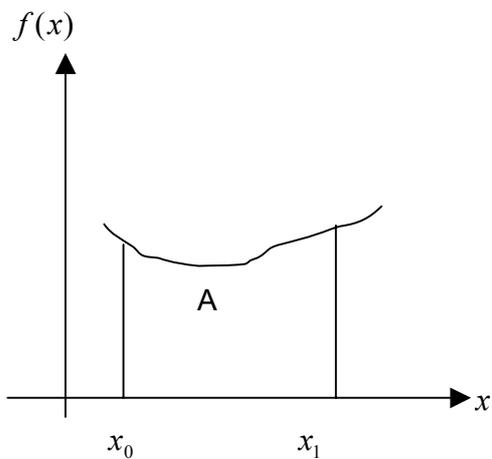
Durchhängende Seile werden durch eine cosh-Funktion dargestellt und zwar

$$f(x) = h_0 + c \left(\cosh \frac{x-x_0}{c} - 1 \right) \quad c > 0$$

Ihre Länge des Graphen zwischen $x = a$ und $x = b$ ist nach \otimes

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{x-x_0}{c} \right)^2} dx \\ &= \int_a^b \cosh \frac{x-x_0}{c} dx = c \left(\sinh \frac{b-x_0}{c} - \sinh \frac{a-x_0}{c} \right) \end{aligned}$$

Flächeninhalte von Flächen mit gegebenen Randkurven

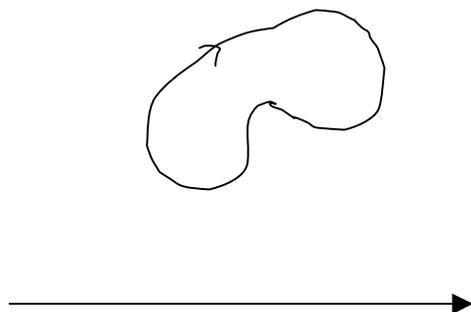
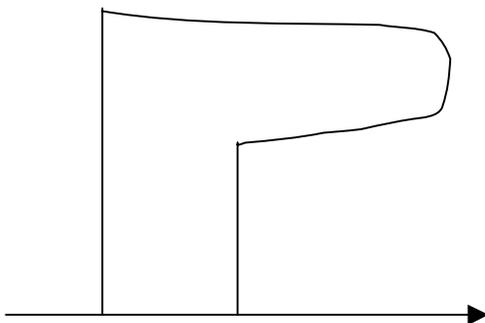


Bekanntlich gilt

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

Stellen wir uns vor, daß der Funktionsgraph von f durch eine stückweise glatte Parametrisierung $y = \gamma_1(t)$ $x = \gamma_2(t)$ gegeben ist. Dann gilt nach Substitution

$$A = \int_{\gamma_1(x_0)}^{\gamma_1(x_1)} f(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt \quad \text{mit } \gamma_2(t_0) = x_0; \gamma_2(t_1) = x_1$$



Daraus wird klar: Ist die Kurve eine geschlossene Jordankurve, die ihr Inneres im Uhrzeigersinn durchläuft so ergibt das Integral

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt$$

des Flächeninhaltes des eingeschlossenen Gebiets.

Man sieht sofort, daß

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) \dot{y}(t) dt$$

gilt.

Bsp.: (Kreisfläche) Parametrisierung $x = r \cdot \cos t$, $y = r \cdot \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$
Somit ergibt sich

$$A = - \int_0^{2\pi} r \sin^2 t dt = r^2 \cos t \sin t = r^2 \cos t \sin t \Big|_0^{2\pi} - r^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos t}_{1-\sin t} dt$$

$$\Rightarrow - \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (r^2(0) - r^2 2\pi) = -r^2 \pi$$

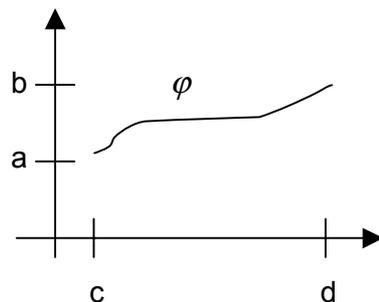
Bsp.: (Ellipse) $x = a \cos t$, $y = -b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

$$A = \int_0^{2\pi} ab \sin t dt = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = ab \pi$$

Definition III.11: Es sei γ ein stückweise glatter Weg mit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stkw. glatte Parametrisierungsformat. Damit ist auch

$$\delta = \gamma \circ \varphi, \text{ also } \delta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$$

ein stkw. glatter Weg. Wir nennen in diesem Fall γ und φ äquivalent.



$$\gamma(b) = \delta(c)$$

$$\gamma(a) = \delta(c)$$

Satz III.12: Zwei äquivalente Wege γ und φ erzeugen die gleiche Kurve, haben die selben Anfangs- und Endpunkte und haben die selbe Bogenlänge. Ist γ geschlossen oder doppelpunktfrei so gilt das auch jeweils für φ . Des Weiteren stimmen auch die Tangenteinheitsvektoren in den entsprechenden Punkten überein, d.h. es gilt mit $\delta = \gamma \circ \varphi$

$$T_\delta(\tau) = T_\gamma(t), \text{ wobei } t = \varphi(\tau) \text{ ist.}$$

Nochmals Flächeninhalte zu vorgegebenen Randkurven

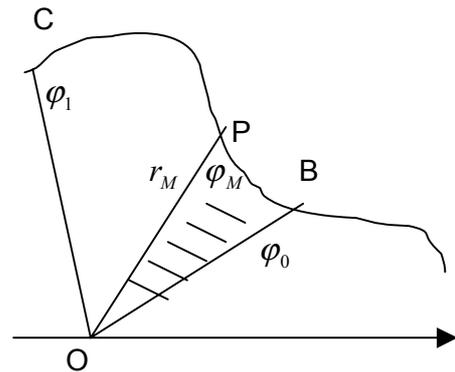
Es sei $r = f(\varphi)$ gegeben, wobei f stetig auf $[\varphi_0, \varphi_1]$ ist. Dann ist der Flächeninhalt eines Winkelsektors OBC (wie skizziert) gleich

$$\otimes A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r(\varphi)^2 d\varphi$$

für den schraffierten Flächeninhalt ΔA gilt

$$\frac{1}{2} r_m^2 \Delta\varphi \leq \Delta A \leq \frac{r_M^2}{2} \Delta\varphi$$

und somit gilt $\frac{r_m^2}{2} \leq \frac{\Delta A}{\Delta\varphi} \leq \frac{r_M^2}{2}$



Mit der Flächeninhaltsfunktion $A_n = F(\varphi)$, die den Inhalt des Sektors OBP beschreibt folgt aus den Ungleichungen $\Delta\varphi \rightarrow 0$

$$\frac{dA}{d\varphi} = F'(\varphi) = \frac{1}{2} r^2$$

Der Hauptsatz der Diff.-und Integralrechnung liefert gerade die Behauptung \otimes .

Achtung bei der Ellipse!

Bei der Darstellung \otimes sind wir ausgegangen von einer Parametrisierung

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi) \cos \varphi \\ y &= r(\varphi) \sin \varphi \end{aligned} \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$$

Diese Darstellung ist jedoch nicht äquivalent zu

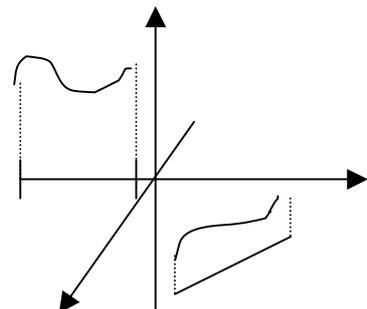
$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned}$$

bei der Ellipse.

Kurvenintegrale

Betrachten wir den anschaulichen Fall $n = 3$. Die Kurve besitzt in $\gamma(t)$ den skalaren Funktionswert $f(\gamma(t))$. Zur Berechnung des Integrals $\int_\gamma f dt$ wird die Kurve durch die Zer-

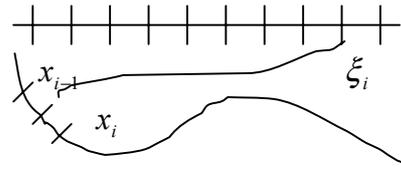
legung des Parameterintervalls $z = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = b\}$ in Bögen über $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i < m$)



der Länge $\Delta S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\dot{\gamma}(t)| dt = |\dot{\gamma}(\xi_i)| |I_i|$ ($\xi_i \in I_i$) zerlegt.

Mit

$$f(\gamma(\xi_1)) \Delta S_i = f(\gamma(\xi_i)) |\dot{\gamma}(\xi_i)| |I_i|$$



wird das Integral über dem i -ten Teilintervall approximiert, d.h. das Intervall durch

$$S(Z, f) = \sum_{i=1}^m f(\gamma(\xi_i)) |\dot{\gamma}(\xi_i)| |I_i|.$$

Diese Riemann-Summe konvergiert mit $m \rightarrow \infty$ und

$$|I_i| \rightarrow 0 \text{ gegen } \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Damit haben wir folgende Definition motiviert.

Definition III.13: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann heißt $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$ das Kurvenintegral von f längs γ .

Kochrezept

Zur Berechnung von $I = \int_{\gamma} f ds$ in \mathbb{R}^n

1) Parametrisiere die Kurve mit

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad a \leq t \leq b$$

2) Bogenelement bestimmen mittels Differentiation

$$ds = |\dot{\gamma}(t)| dt = \sqrt{\left(\dot{\gamma}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_2(t)\right)^2 + \dots + \left(\dot{\gamma}_n(t)\right)^2} dt$$

3) Einsetzen: $\gamma(t)$ in den Integranden $f(\gamma(t))$

$$ds = |\dot{\gamma}(t)| dt, \text{ Integrationsgrenzen.}$$

4) Ausrechnen des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Bsp.: Es ist die Masse $M = \int \rho ds$ einer Feder mit Massendichte $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ zu berechnen.

Dabei ist die Kurve gegeben durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ 3t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 6\pi$

1) dito

$$2) \quad ds = (4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 9)^{\frac{1}{2}} dt = (4 + 9)^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{13} dt$$

$$3) \quad I = \int_0^{6\pi} (4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t) \cdot \sqrt{13} dt = 4\sqrt{13} \int_0^{6\pi} dt = 24\sqrt{13}\pi$$

Satz: Es sei γ ein zusammengesetzter Weg, d.h.

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m$$

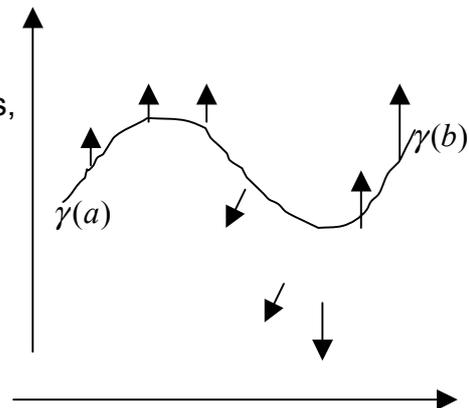
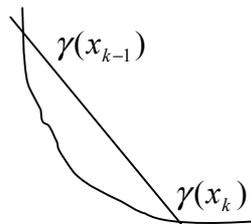
Ferner gelten die Voraussetzungen des letzten Satzes.

Dann gilt: $\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + \dots + \int_{\gamma_m} f ds$

Integration eines Vektorfeldes entlang einer Kurve

Ist $Z = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ des Parameterintervalls, so gibt es auf Verbindungsstrecke $\gamma(x_{k-1})$ und $\gamma(x_k)$ einen Punkt η_k mit

$$\varphi(\gamma(x_k)) - \varphi(\gamma(x_{k-1})) = \varphi'(\eta_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$$



und da

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(\gamma(x_k)) - \varphi(\gamma(x_{k-1}))] = \varphi(x_n) - \varphi(x_0)$$

$$\Rightarrow \varphi(\gamma(x_n)) - \varphi(\gamma(x_0)) = \sum_{k=1}^n \varphi'(\eta_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$$

Sei nun $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ irgend ein zu Z gehörender Zwischenvektor und $\xi_k = \gamma(\tau_k)$.

Dann wird

$$\sum_{k=1}^n \varphi'(\xi_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})) \approx \sum_{k=1}^n \varphi'(\eta_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$$

sein, wenn φ' und γ "vernünftig" sind und Z fein genug.

Man erkennt, dass sich $\varphi(\gamma(x_n))$ aus $\varphi(\gamma(x_0))$ und φ' mittels eines wohldefinierten Grenzprozesses erkennen lässt.

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $S(Z, f) = \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$

Der Grenzwert von $S(Z, f)$ mit $|Z| \rightarrow 0$ wird mit $\int_{\gamma} f \cdot dx$ bezeichnet und das Wegintegral von f längs γ genannt.

Dieses Integral läßt sich als Summe von Riemann-Stieltjeschen-Integralen berechnen und zwar ist

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot d_{j\gamma}(t)$$

Für stetig diffb. γ gilt

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_j(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Bemerkung:

i) Mit $T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ erhalten wir $\int_{\gamma} v dx = \int_a^b \underbrace{(v(\gamma(t)) \cdot T(t))}_{\rightarrow R} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\gamma} (vT) ds$

ii) Analog zu i) kann man im \mathbb{R}^3 auch nur die Normalenkomponente betrachten.

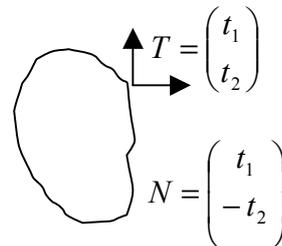
Man definiert $N(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T(t)$

Man definiert den Fluß von v durch γ

$$\oint_{\gamma} v dn = \oint_{\gamma} (v \cdot N) ds$$

iii) Für geschlossene Kurven schreibt man häufig

$$\oint_{\gamma} f ds \text{ bzw. } \oint_{\gamma} f \cdot dx$$



Das Potential eines Gradientenfeldes

Analog zum eindimensionalen Fall liefert das Kurvenintegral das geeignete Mittel zu einer Ableitung Δf einer Funktion f in mehreren Veränderlichen eine Stammfunktion zu konstruieren. Das Analogon zu zusammenhängenden Intervallen in R ist im R^n das Gebiet.

Definition: $G \subset R^n$ heißt Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist. (Man beachte, G heißt offen, falls es zu jedem $x \in G$ eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset G$ gibt.)
 G wird als zusammenhängend bezeichnet, wenn es zu je zwei Punkten x_1 und x_2 aus G einen stkw. glatten Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = x_1$ und $\gamma(b) = x_2$.

Satz: Sei $G \subset R^n$ -Gebiet und $V: G \rightarrow R^n$ ein stetiges Gradientenfeld mit Stammfunktion ($v = \Delta f$).

Dann gilt für jeden stkw. glatten Weg γ mit Bild in G und Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$

$$\int_\gamma v \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Beweis:
$$\int_\gamma v \cdot dx = \int_\gamma (\nabla f) dx = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right) dt = f(\gamma(t)) \Big|_{t=a}^b$$

Bei mehreren aneinander hängenden Kurvenstücken ist dies für jedes Teilstück anzuwenden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_\gamma v \cdot dx &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(x_{k-1})) + f(\gamma(x_{k-1})) - f(\gamma(x_k)) + \dots \\ &+ f(\gamma(x_1)) - f(\gamma(x_a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Beispiel: Das Feld $E: R^3 \rightarrow R^3$ mit $E(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3z^2x + 3y \end{pmatrix}$ besitzt das Potential

$U(x, y, z) = -(x^2y + xz^3 + 3zy)$. Es gelte $v = \nabla f$, dann bezeichnet man $U = -f$ als Potential von V .

Es gilt für glatten Weg γ zw. $x_0 = (1, 1, 1)$ und $x_1 = (3, 4, 3)$

$$\int_\gamma E dx = - \int_\gamma \nabla U dx = -(U(x_1) - U(x_0)) = -(-471 - (-5)) = 466$$

Das Integral ist Weg unabhängig.

Welche Eigenschaften besitzen denn nun Kurvenintegrale, wenn der Integrand v ein Potential besitzt?

Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v \in C(G, \mathbb{R}^n)$

Dann ist äquivalent:

- i) v ist ein Potentialfeld
- ii) Für alle glatten Wege in G hängt $\int_{\gamma} v dx$ nur von Anfangs- und Endpunkt ab. (Man bezeichnet das Integral als wegunabhängig)
- iii) Für alle geschlossenen und glatten Wege γ in G gilt $\oint_{\gamma} v dx = 0$

Beweis: Bis auf (iii) \rightarrow (i) sind alle Folgerungen einfach zu zeigen

Zu $x, x_0 \in G$ definieren wir $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_{x_0}^x v dx := \int_{\gamma} v dx$$

mit beliebigen x, x_0 verbindenden regulären Kurven in G .

Zu zeigen ist nun $\nabla f = v$.

$$f(x + he_1) - f(x) = \int_x^{x+he_1} v dx = \int_0^h v_1(x + te_1) dt = v_1(x + \xi e_1) \cdot t$$

(Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Damit folgt $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = v_1$

Ebenso $\frac{\partial f}{\partial x_i} = v_i \quad i = 2, \dots, n$

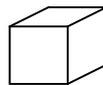
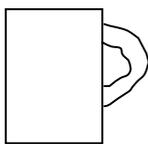
Wann existiert nun zu einem stetig diffbaren Vektorfeld $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential?

In der Umgebung eines Punktes erkennt man dies an der Symmetrie der Jakobi-Matrix.

$$J_v(x) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3 \end{pmatrix}$$

Definition: Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene, doppelptfreie Kurve in G stetig auf einen Punkt in G zusammengezogen werden kann, ohne dass G verlassen wird.

- Beispiel:**
- i) Jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ "ohne Loch" ist einfach zusammenhängend
 - ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend
 - iii) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend
 - iv) \mathbb{R}^3 ohne endlich viele Punkte ist einfach zusammenhängend



Nicht einfach zusammenhängend

einfach zusammenhängend

Satz: 2. Hauptsatz der Kurvenintegrale

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Ein Vektorfeld $v \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann ein Potentialfeld wenn

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots, n) \text{ erfüllt ist, d.h. } J_v(x) = J_v^T(x)$$

Diese Bedingung wird auch als Integrierbarkeitsbedingung bezeichnet.

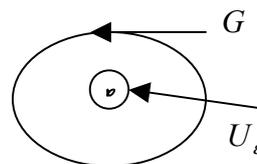
Beweis: Mit dem Satz von Schwarz folgt aus $v = \nabla f$ die Symmetrie der Jacobi-Matrix.

Gegeben sei nun von $J_v(x) = J_v^T(x) \quad \forall x \in G$.

Zu $x \in G$ und zu jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(x) \subset G$ können wir mit

$$f(x) = \int_0^1 v(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt$$

explizit ein Potential zu v angeben.



Hier für

$$\begin{aligned} \nabla f &= \int_0^1 \nabla \left[v(\underbrace{x_0 + t(x - x_0)}_{\gamma(t)})(x - x_0) \right] dt = \int_0^1 [t \cdot J_v^T(\gamma(t)) \cdot (x - x_0) + v(\gamma(t))] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \cdot v(\gamma(t))] dt = [t \cdot v(\gamma(t))]_0^1 = v(x) - 0 = v(x) \end{aligned}$$

Für beliebiges $x \in G$ wählt man als Integrationsweg γ einen Streckenzug. Es bleibt zu zeigen, dass $f(x)$ nicht vom gewählten Streckenzug abhängt, was wir jedoch nicht beweisen werden.

Beispiel: Die auf $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definierte Funktion $v(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ erfüllt auf

ganz G die Bedingung $\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}$, es existiert jedoch kein Potential. Nach

obigem Satz müsste $\oint_T v dx = 0$ sein. Auf dem Kreis $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$(0 \leq t \leq 2\pi), \quad \dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\oint_T v dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -y & x \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\dot{\gamma}(t)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$



Bemerkung: Im R^3 ist $J_v(x) = J^T(x)$ gleichbedeutend mit

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Wie bestimmt man im praktischen Fall ($n = 3$) ein Potential zu einem gegebenen Vektorfeld?

A) Methode mit Kurvenintegral

1. Schritt: Besitzt $v \in (G, R^3)$ ein Potential?

$\operatorname{rot} v \neq 0$ für ein $x \in G \Rightarrow$ kein Potentialfeld \Rightarrow fertig!

2. Schritt: G einfach zusammenhängend und $\operatorname{rot} v = 0$

Man wählt $x_0 \in G$ fest und zu jedem $x \in G$ eine geeignete Kurve γ in G , die x_0 mit x verbindet.

$$f : G \rightarrow R, f(x) := \int_{\gamma} v dx \text{ eine Stammfunktion}$$

Bem.: Einfache Wege sind der Streckenzug von x_0 nach x oder stkw. parallel zu den Koordinatenachsen verlaufende Streckenzüge.

B) Ansatzmethode

Man löst die drei partiellen Dgl. $\nabla f = v$, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = v_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = v_2, \frac{\partial f}{\partial x_3} = v_3$$

1. Schritt: Ist G einfach zusammenhängend?

Wenn ja, kann mit $\operatorname{rot} v \stackrel{!}{=} 0$ entscheiden werden, ob v ein Potential besitzt.

2. Schritt: (In der folgenden Vorgehensweise kann die Integrationsreihenfolge nach x, y, z beliebig vertauscht werden)

$$f(x, y, z) = \int_{v_1} (x, y, z) dz + c(y, z) \quad \otimes$$

wobei die Integrationskonstante von y und z abhängen darf

3. Schritt: $f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \int v_1(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial y} c(y, z) \stackrel{!}{=} v_2$

4. Schritt: Unbestimmte Integration nach y liefert mit

$$c_g(y, z) = g(y, z) = v_2 - \int \frac{\partial v_1}{\partial y} dx$$

$$c(y, z) = \int g(y, z) dy + d(z)$$

daher hängt die Integrationskonstante d von z ab.

Einsetzen in \otimes liefert

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + \int g(y, z) dy + d(z)$$

5. Schritt: Differentiation nach z liefert

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \int v_1(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int g(y, z) dy + \frac{\partial}{\partial z} d(z) \stackrel{!}{=} v_3$$

$$d'(z) = v_3 - \frac{\partial}{\partial z} \int v_1(x, y, z) dx - \frac{\partial}{\partial z} \int g(y, z) dy$$

6. Schritt: Unbestimmte Integration nach z liefert

$$h(z) := d'(z) \text{ und } d(z) = \int h(z) dz$$

und somit

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + \int g(y, z) dy + \int h(z) dz$$

$$g(y, z) = v_2 - \frac{\partial}{\partial y} \int v_1 dx, \quad h(z) = v_3 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\int v_1 dx + \int g dy \right)$$

Einfache Form des Kochrezepts zu Methode B)

Gesucht: f mit $\nabla f = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

- 1) Prüfe $J_v(x) = J_v(x)^T$ ($x \in G \subset \mathbb{R}^3$)
Wenn ja, fahre fort mit 2, ansonsten fertig!
- 2) Bestimme $a(x, y, z) = \int v_1 dx$
- 3) Bestimme $b_y(x, y, z) := v_2(x, y, z) - \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial y}$
Falls b_y von x abhängt \rightarrow Rechenfehler!
- 4) Bestimme $b(y, z) = \int b_y dy$
- 5) Bestimme $c_z(z) := v_3(x, y, z) - \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial b(y, z)}{\partial z}$
Falls c_z von x oder y abhängt \rightarrow Rechenfehler!
- 6) Bestimme $c(z) = \int c_z dz$
 $f(x, y, z) = a(x, y, z) + b(y, z) + c(z)$

Bsp.: $G = \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}$

1. Schritt: $J_v(x) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin x & 2y \cos x & 0 \\ 2y \cos x & 2 \sin x & 2e^{2z} \\ 0 & 2e^{2z} & 4ye^{2z} \end{pmatrix}$ (Diagonalelemente

müssen nicht berechnet werden)

2. Schritt: $a(x, y, z) = \int y^2 \cos x dx = y^2 \sin x$

3. Schritt: $b_y(y, z) = 2y \sin x + e^{2z} - 2y \sin x = e^{2z}$

4. Schritt: $b(y, z) = \int e^{2z} dy = ye^{2z}$

5. Schritt: $c_z(z) = 2ye^{2z} - 0 - 2ye^{2z} = 0$

6. Schritt: $c(z) = \int c_z dz = \bar{c}$

$$f(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + \bar{c}, \quad \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}$$

Bsp.: $y = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \sin x \\ 0 \end{pmatrix} \quad J_v(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3y \cos x & \dots & \dots \end{pmatrix}$

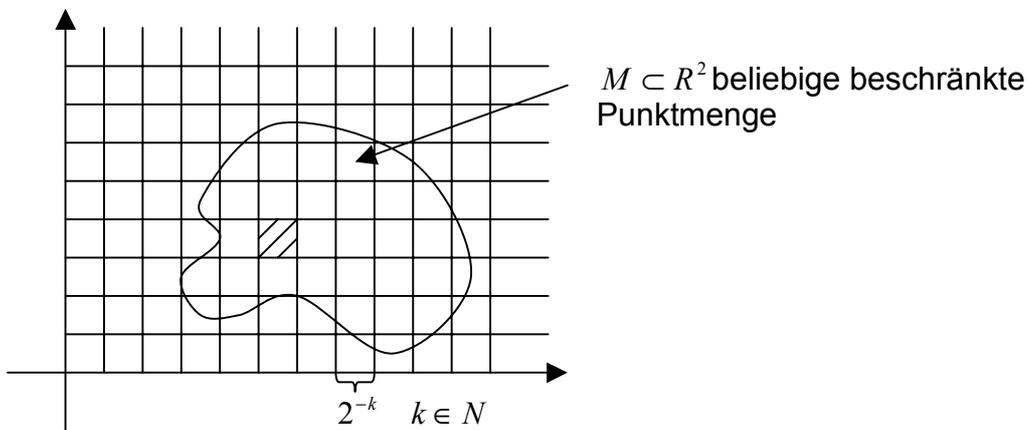
Hier testen wir nicht die Symmetrie von $J_v(x)$!

2) $a(x, y, z) = \int 3x dx = \frac{3}{2}x^2$

3) $b_y(y, z) = 3y \sin x - 0$ \swarrow $b_y(y, z)$ hängt von x ab!
 Fertig! Es existiert \searrow
 Kein Potential zu v !

Integration in ebenen Bereichen

Welche Bereiche kann man einen Flächeninhalt zuordnen?



Sei $k \in \mathbb{N}$. Durch das Gitter achsenparalleler Koordinatenlinien $x = n \cdot 2^{-k}$ wird die (x, y) -Ebene in Quadranten mit dem Flächeninhalt 2^{-2k} zerlegt.

$s_k(M) :=$ Flächeninhalte aller Quadrate, die ganz (einschließlich des Randes) in M liegen

$S_k(M) :=$ Flächeninhalt aller Quadrat, die mindestens einen Punkt in M haben

Folglich gilt: $s_k(M) \leq S_k(M)$, $s_k(M) \leq s_{k+1}(M)$, $S_{k+1}(M) \leq S_k(M)$

$S_1 \leq c$: $s_1(M) \leq S_1(M)$, $s_k(M) \leq s_{k+1}(M) \Rightarrow$ monoton wachsend

$s_k(M) \leq S_k(M) \leq S_0(M) \Rightarrow (S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt

Folglich existieren die Grenzwerte

$F_i(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M)$

$F_a(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M)$

Definition: Ein beschränkter Bereich heißt Riemann-messbar, falls $F_i(M) = F_a(M)$.

In diesem Fall ist $F(M) = F_i(M) (= F_a(M))$ der Flächeninhalt von M .

Bemerkung: $M = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, 1]^2, x, x \in Q\}$

Es gilt $F_a(M) = 1, F_i(M) = 0$

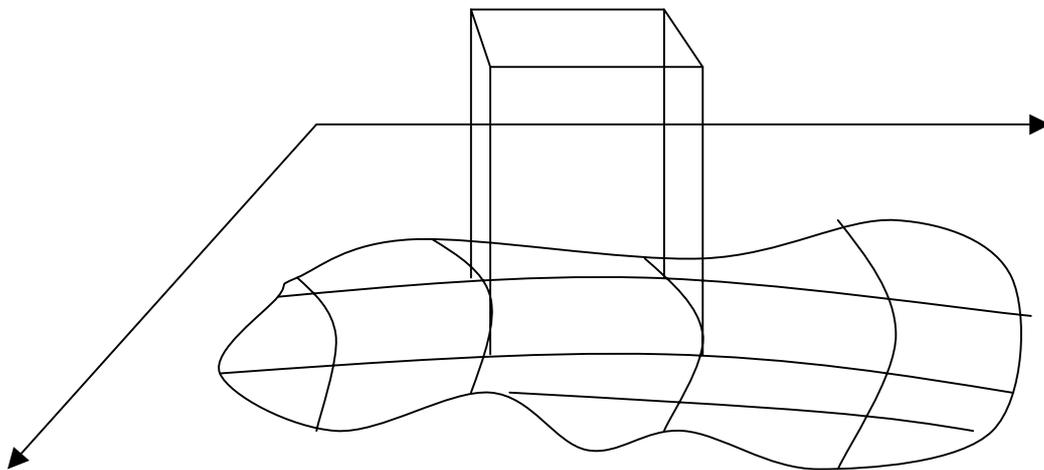
\Rightarrow nicht Riemann-messbar

Satz: Ein beschränktes Gebiet (Gebiet $\hat{=}$ offen, zusammenhängend) $G \subseteq R^2$ mit stückweise glattem Rand besitzt einen Flächeninhalt

$$F = \lim_{k \rightarrow 0} s_k(G) = \lim_{k \rightarrow 0} S_k(G)$$

Definition: Ein Bereich aus R^2 heißt regulär, wenn

- i) der Rand ∂B stkw. glatt ist
- ii) das Innere $B \setminus \partial B$ ein nicht leeres, beschränktes Gebiet in R^2 ist
- iii) B abgeschlossen ist.



$$(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in B_i$$

Netz regulärer Bögen zerlegt B in n Teilbereiche B_i

$$\delta(B_i) = \inf_{r \in R} \{B_i \subset U_r(x), x \in B_i\}$$

$\delta(B_i)$ Durchmesser von B_i , Flächeninhalt von B_i ist ΔF_i

Wir definieren die Riemann-Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta F_i \quad ((\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in B_i, 1 \leq i \leq n)$$

Es sei $B \subset R^2$ regulärer Bereich und $f : B \rightarrow R$ beschränkt. Dann konvergieren bei ständiger Verfeinerung unabhängig von den einzelnen Zerlegungsfolgen und den gewählten $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in B_i$ die Riemann-Summe gegen einen festen Grenzwert. Die Verfeinerung erfülle

$$\delta_{\max} := \max\{\delta(B_i); 1 \leq i \leq n\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Der gemeinsame Grenzwert wird mit $\int_B f dF$ bezeichnet und heißt (Gebiets-) Integral von f über B und dF das Flächenelement.

$$\int_B f dF = \lim_{\delta_{\max} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n(\delta_{\max})} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta F_i$$

Satz: Für das Gebietsintegral gelten ($f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt)

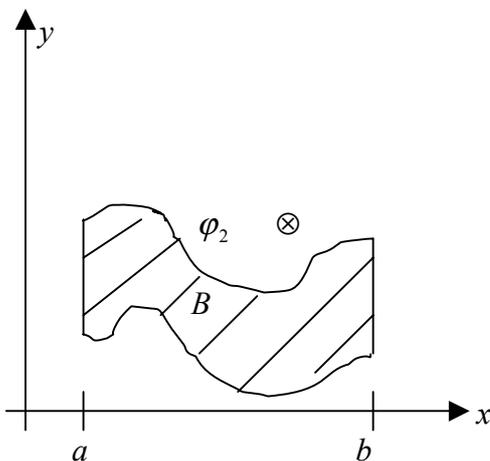
- i) $\int_B (\alpha f + \beta g) dF = \alpha \int_B f dF + \beta \int_B g dF \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
- ii) $f(x, y) \leq g(x, y) \quad ((x, y) \in B) \Rightarrow \int_B f dF \leq \int_B g dF$
- iii) $\int_B f dF = \int_{B_1} f dF + \int_{B_2} f dF$, falls B durch eine glatte Kurve in zwei Teilbereiche B_1 und B_2 zerlegt wird.

Mittelwertsatz: Sei B zusammenhängend und abgeschlossen. Dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ einen Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$ mit

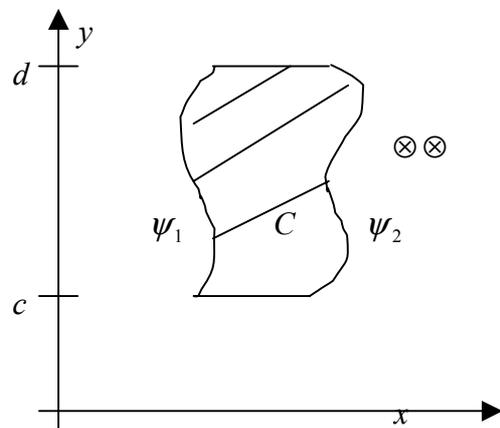
$$\int_B f dF = f(\bar{x}, \bar{y}) \int_B dF$$

Berechnung des Flächenintegrals

Unter einem Normalbereich bzgl. der x -Achse versteht man eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ der Form $B = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, wobei φ_1, φ_2 stetig Funktionen auf $[a, b]$ sind mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad (x \in [a, b])$



Normalbereich bzgl. x -Achse



Normalbereich bzgl. y -Achse

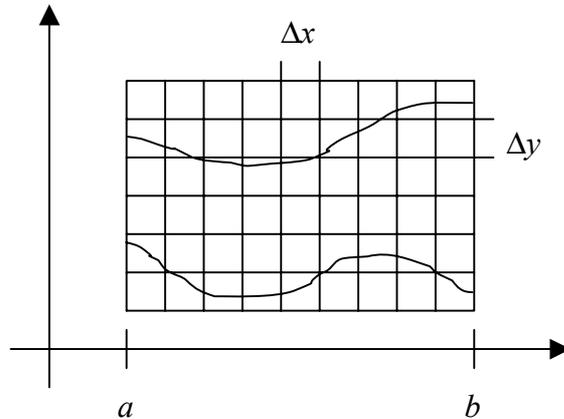
Satz: Ist f stetig auf dem Normalbereich $B \subset \mathbb{R}^2$ bzgl. der x -Achse in \otimes , so haben wir

$$\int_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Analog gilt für $\otimes \otimes$

$$\int_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx \right)$$

Beweis:



Mit $B_{1,k}, \dots, B_{n_k,k}$ berechnen wir die Rechtecke in der k -ten Spalte mit Breite Δx . Mit

$(x_k^*, k_{ik}^*) \in B_{ik}$ bilden wir

$$\otimes \left(\sum_{k=1}^m f(x_k^*, k_{ik}^*) \Delta y \right) \Delta x$$

die von $\overline{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\varphi_1(x_k^*)}^{\varphi_2(x_k^*)} f(x_k^*, y) dy$

$$S_M := \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta F_i \text{ (siehe oben)}$$

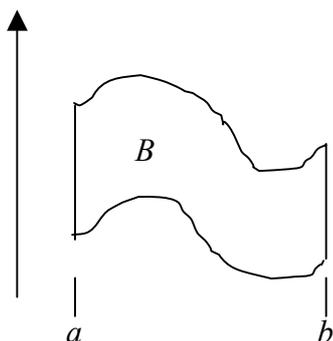
nur die Anteile in den Randstreifen unterscheidet. Für $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \rightarrow 0$ strebt dieser Unterschied gegen 0.

Die innere Summe strebt für $\Delta y \rightarrow 0$ gegen

$$\int_{\varphi_1(x_k^*)}^{\varphi_2(x_k^*)} f(x_k^*, y) dy$$

Beim Grenzübergang $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \rightarrow 0$ strebt als Doppelsumme gegen

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



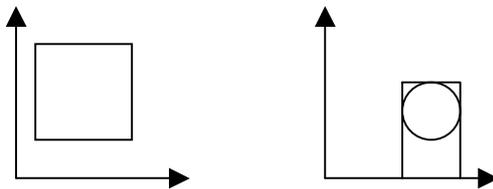
Bemerkung: Der Normalbereich B sei durch mehrere achsenparallele Linien in mehrere Normalbereiche B_1, \dots, B_n zerlegt. Dann gilt mit der Additivität des Integrals und obigem Satz

$$\begin{aligned} \int_B f dF &= \int_{B_1} f dF + \dots + \int_{B_n} f dF \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Bemerkung: Zerlegung von B in Normalbereiche ist nicht eindeutig
Ist B sowohl ein Normalbereich bzgl. der x -Achse als auch der y -Achse,

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\} \end{aligned}$$

Bsp.:



$$\text{Dann gilt } \int_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Für Rechtecke

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

gilt nun

$$\int_R f dF = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Satz von Fubini :

Ist f auf R integrierbar und existiert

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (y \in [c, d])$$

So ist g auf $[c, d]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_R f(x, y) dF = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge

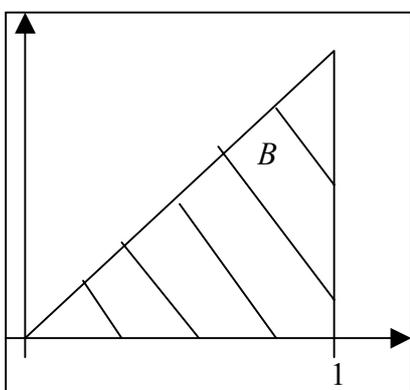
Ist die Funktion f auf $R = [a, b] \times [c, d]$ integrierbar und existieren $\int_a^b f(x, y) dx$ ($y \in [c, d]$)

und $\int_c^d f(x, y) dy$ ($x \in [a, b]$) so gilt

$$\int_R f dF = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satz sind erfüllt, falls f stetig ist.

Bsp.:



$$\varphi_1(x) = 0$$

$$\varphi_2(x) = 0 \quad \downarrow y = x \text{ Gerade}$$

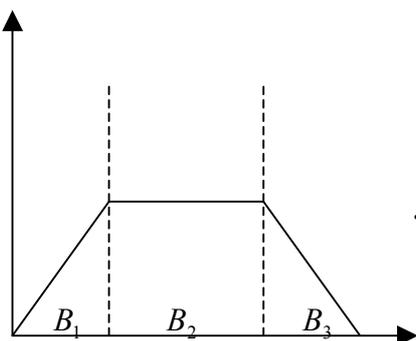
$$\left(\frac{1}{2}\right) \int_B f dF = \int_0^1 \underbrace{\int_0^x 1 dy}_{x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_B y x dF = \int_0^1 \int_0^y x y dy dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \Big|_0^x \right] dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$

$$\int_B 1 dF = \int_0^1 \underbrace{\int_y^{1-y} 1 dx}_{1-y} dy$$

$$\psi_1(y) = y \quad \psi_2(y) = 1$$

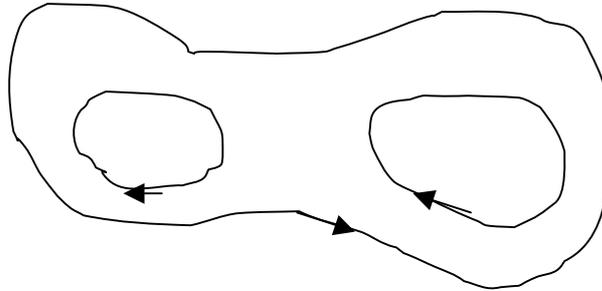
$$\psi_1(y) = 0 \quad \psi_2(y) = 1 - y$$



$$\int_B f dF = \int_{B_1} f dF + \int_{B_2} f dF + \int_{B_3} f dF$$

Satz von Green (Gaußscher Integralsatz in der Ebene)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich, dessen Rand ∂B aus endlich vielen, geschlossenen, stückweise glatten Bögen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Die Bögen seien so parametrisiert, daß B stets links zur Durchlaufrichtung liegt.



$$\int_{\partial B} \vec{v} d\vec{x} = \int_{\gamma_1} \vec{v} d\vec{x} + \dots + \int_{\gamma_n} \vec{v} d\vec{x}$$

Satz von Green (1793-1841)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset D$ und ∂B wie oben beschrieben.

Dann gilt für jedes $v \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$

$$\int_B \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} dF = \int_{\partial B} v d\vec{x}$$

Bew.: Betrachten wir zuerst den Spezialfall $v_2(x, y) = 0$ und B ist ein Normalbereich bzgl. der x -Achse.

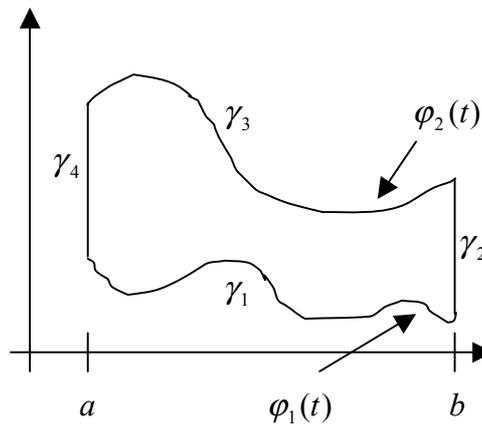
Der Rand besteht aus

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \quad \varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b)$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \quad \varphi_1(a) \leq t \leq \varphi_2(a)$$



wobei γ_3, γ_4 entgegengesetzt durchlaufen werden

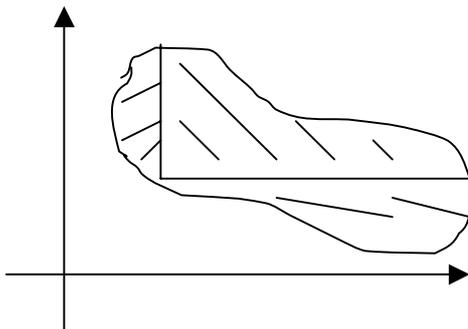
Mit $v_2 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} v d\vec{x} &= \int_{\gamma_1} v_1 d\vec{x} + \int_{\gamma_2} v_1 d\vec{x} - \int_{\gamma_3} v_1 d\vec{x} - \int_{\gamma_4} v_1 d\vec{x} \\ &= \int_a^b v_1(t, \varphi_1(t)) dt + 0 - \int_a^b v_1(t, \varphi_2(t)) dt - 0 \\ &= \int_a^b v_1(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b v_1(t, \varphi_2(t)) dt \\ &= - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial v_1}{\partial y} dy \right) dx = \int_B \frac{\partial v_1}{\partial y} dF \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung liefert für einen Normalbereich bzgl. der y -Achse mit v_0

$$\int_{\partial B} v d\vec{x} = \int_B \frac{\partial v_2}{\partial x} dF$$

Man beachte nun, daß sich jeder Normalbereich bzgl. der x -Achse in Normalbereiche bzgl. der y -Achse zerlegen läßt und umgekehrt



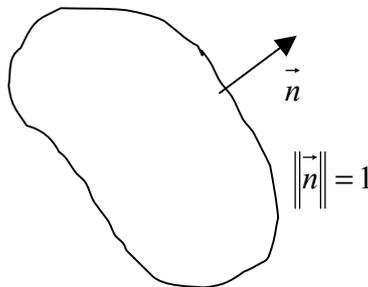
Da die Kurvenintegrale über die Hilfslinien umgekehrtes Vorzeichen haben, heben sich diese auf.
 Durch Addition der beiden Spezialfälle ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Bemerkung: Mit $v_1 = 0, v_2 = x$ bzw. $v_1 = -y, v_2 = 0$ ergibt sich der Spezialfall

$$\int_B dF = \int_{\partial B} xdy = \int_{\partial B} -ydx = \frac{1}{2} \int_{\partial B} xdy - ydx$$

Satz von Green: Es sei $u \in C^2(D, R)$

$$\text{Dann gilt } \int_B \Delta u dF = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$$



Beweis: Wir setzen $v_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}$ und $v_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Dies liefert

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =: \Delta u$$

Mit dem Green'schen Satz erhalten wir nun

$$\int_B \Delta u dF = \int_{\partial B} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_{\partial B} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{gradu}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{y}(s) \\ -\dot{x}(s) \end{pmatrix}}_{=n} ds =$$

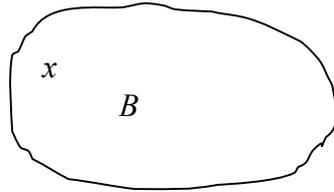
stets nach außen
weisende Normalvektor

$$= \int_{\partial B} \nabla u \cdot n \cdot ds = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Bemerkung: Sei $u \in C^2(D, R)$. Gilt $\Delta u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D$,

$$\text{dann folgt } \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Beispiel:



Bestimme $\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \Delta \ln(x^2 + y^2) &= \operatorname{div} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= 2 \left(\underbrace{\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}}_{2. \text{ Abl.}} + \underbrace{\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}}_{2. \text{ Abl.}} \right) = 0 \text{ f\"ur } (x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

Liegt $x \in \overline{D}$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds = 0$$

Sei $x \in D$

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds = - \int_{\gamma} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds + \underbrace{\int_{\partial B \cup \gamma} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds}_{=0}$$

$$\gamma(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

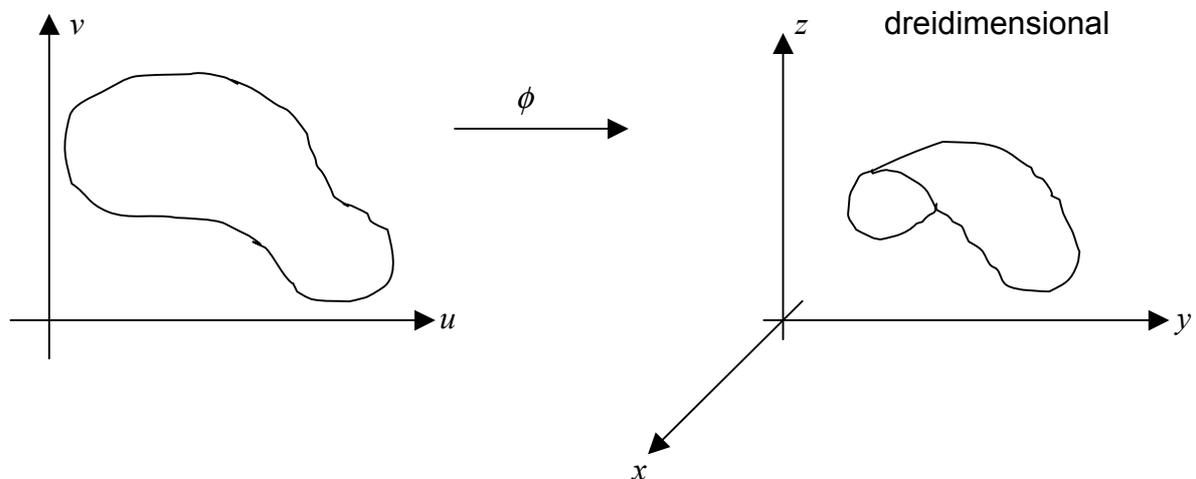
f\"ur $(x, y) = \gamma(t)$ gilt $\frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} = \frac{2}{\varepsilon}$

Damit folgt

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\varepsilon} dt = -4\pi$$

IV Flächen und Flächenintegrale

Unter Flächen stellen wir uns dünne Platten vor, die auch verbogen sein dürfen



Definition: Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und messbar (d.h. wohl def. Flächeninhalt). Unter einem Flächenstück versteht man den Wertebereich einer stetig diffb. Abb. $\phi: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dabei wird vorausgesetzt, dass $\text{rang}(\nabla \phi(u, v)) = 2$ ($(u, v) \in D$). Die Abbildung ϕ , wie auch ihre Funktionsgleichung $\underline{x} = \underline{\phi}(u, v)$ nennt man eine Parameterdarstellung des Flächenstücks oder auch Flächendarstellung.
 u, v heißen die Parameter des Flächenstücks und \bar{D} der zugehörige Parameterbereich.

Die Parameterdarstellung $\underline{x} = \underline{\phi}(u, v)$ erhält mit den Komponentendarstellung

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \underline{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} \bar{x}(u, v) \\ \bar{y}(u, v) \\ \bar{z}(u, v) \end{pmatrix}$$

die explizite Form

$$\begin{matrix} \bar{x}(u, v) \\ \bar{y}(u, v) \\ \bar{z}(u, v) \end{matrix} \quad \text{sowie: } \underline{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} \bar{x}_u & \bar{x}_v \\ \bar{y}_u & \bar{y}_v \\ \bar{z}_u & \bar{z}_v \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underline{\phi}}_{1. \text{ Abl.}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_u \\ \bar{y}_u \\ \bar{z}_u \end{pmatrix}, \underbrace{\underline{\phi}}_{1. \text{ Abl.}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_v \\ \bar{y}_v \\ \bar{z}_v \end{pmatrix}$$

Nach Def. hat $\nabla \underline{\phi}(u, v)$ in D den Rang 2, d.h. $\underline{\phi}_u$ und $\underline{\phi}_v$ sind $\forall (u, v) \in D$ linear abhängig.

Somit gilt

$$\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \neq 0 \text{ in } D$$

Die von $\underline{\phi}_u$ und $\underline{\phi}_v$ aufgespannte Ebene durch den Flächenpunkt $\underline{\phi}(u, v)$ ist die Tangentenebene mit der Parameterdarstellung

$$\underline{x} = \underline{\phi}(u, v) + \lambda \underline{\phi}_u(u, v) + \mu \underline{\phi}_v(u, v) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

und

$$\underline{x} = \lambda \underline{\phi}_u(u, v) + \mu \underline{\phi}_v(u, v)$$

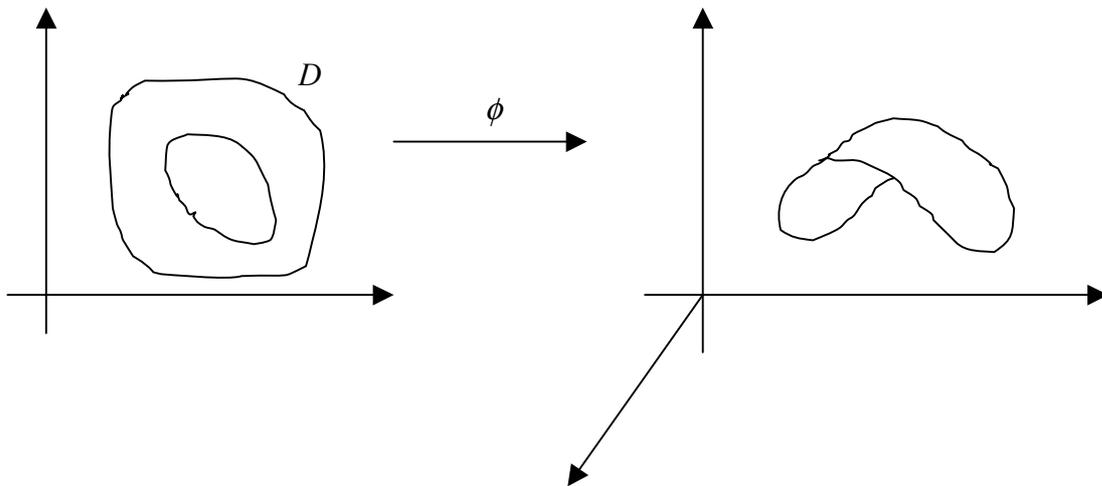
nennt man Tangentialebene.

Der auf der Tangenten- und Tangentialebene von $\underline{\phi}(u, v)$ senkrecht stehende Einheitsvektor

$$n = \frac{\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v}{|\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v|}$$

heißt Flächennormale.

Für ein reguläres Kurvenstück $\Gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in [a, b]$ im Parameterbereich D ist das Bild $\gamma(t) = \underline{\phi}(\Gamma(t))$ eine reguläre Flächenkurve, deren Tangentenvektor $\dot{\gamma}(t) = \underline{\phi}_u \dot{u} + \underline{\phi}_v \dot{v}$ In der Tangentenebene liegt.



Die Bogenlänge $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$ ergibt sich

$$|\dot{\gamma}|^2 = \left(\underline{\phi}_u \dot{u} + \underline{\phi}_v \dot{v} \right)^T \left(\underline{\phi}_u \dot{u} + \underline{\phi}_v \dot{v} \right) = \underbrace{\left(\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_v \right)}_{=E} \dot{u} + 2 \underbrace{\left(\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_v \right)}_{=F} \dot{u} \dot{v} + \underbrace{\left(\underline{\phi}_u + \underline{\phi}_v \right)}_{=G} \dot{v} \dot{v}$$

Beispiel: $\underline{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u, v) \end{pmatrix}, \nabla \underline{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_u(u, v) & g_v(u, v) \end{pmatrix}$

$$\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v = \begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix}, n = \frac{1}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} \begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = 1 + g_u^2, f = g_u \cdot g_v, G = 1 + g_v^2$$

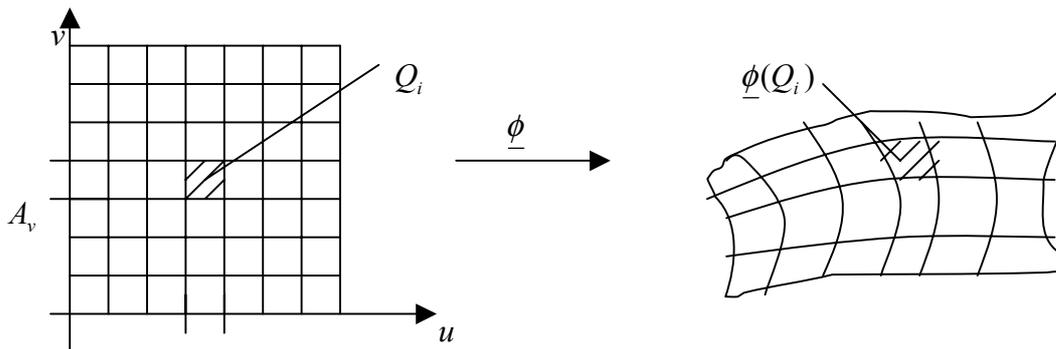
Flächenintegrale

Ein Flächenstück F bezeichnen wir als doppelpunktfrei, wenn es mit einer Parameterdarstellung $\phi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben werden kann, die eineindeutig ist auf ganz D .

Flächeninhalt

Motivation: Es sei $F : \phi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein doppelpunktfreies Flächenstück.

Der Einfachheit nehmen wir an, dass D ein achsenparalleles Rechteck sei



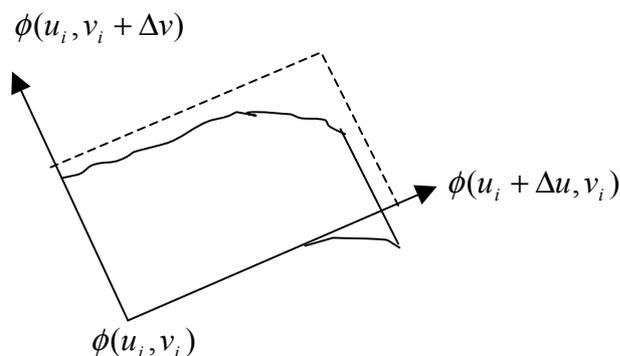
\bar{D} sei in Teilrechtecke Q_1, \dots, Q_m zerlegt. Wenn Rechteckzerlegung fein genug ist, haben $\phi(Q_i)$ Parallelogrammgestalt. Ist Q_i ein Teilrechteck in \bar{D} mit den Seitenlängen Δu und Δv und $\underline{u}_i = (u_i, v_i)$ sei der linke untere Eckpunkt von Q_i , so hat $\phi(Q_i)$ beinahe die Gestalt des Parallelogramms, welches von

$$\phi(u_i + \Delta u, v_i) - \phi(u_i, v_i)$$

und

$$\phi(u_i, v_i + \Delta v) - \phi(u_i, v_i)$$

aufgespannt wird.



Die Vektoren sind ungefähr $\phi_u(u_i, v_i)\Delta u$ bzw. $\phi_v(u_i, v_i)\Delta v$. Für den angenäherten Flächeninhalt $|\Delta\delta_i|$ von $\phi(Q_i)$ gilt

$$|\Delta\delta_i| = \left| \phi_u(u_i, v_i) \times \phi_v(u_i, v_i) \right| \Delta u \Delta v$$

Als Näherung für den Flächeninhalt von F erhalten wir

$$\sum_{i=0}^m \left| \underline{\phi}_u(u_i, v_i) \times \underline{\phi}_v(u_i, v_i) \right| \Delta u \Delta v \quad \otimes$$

Wir sind also motiviert in $\otimes (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$ gegen Null streben zu lassen und so zum Integral über zu gehen.

Definition: Als Flächeninhalt eines doppelpunktfreien Flächenstücks $F : \phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieren wir die Zahl

$$A(F) = \int_F 1 d\delta = \int_D \left| \underline{\phi}_u(u, v) \times \underline{\phi}_v(u, v) \right| d(u, v)$$

Der Ausdruck $d\delta = \left| \underline{\phi}_u(u, v) \times \underline{\phi}_v(u, v) \right| d(u, v)$ wird gelegentlich als Flächenelement bezeichnet.

Bsp.: Kugeloberfläche

$$K : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \delta \\ r \sin \varphi \cos \delta \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} A(K) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \underline{\phi}_\varphi(\varphi, \delta) \times \underline{\phi}_\delta(\varphi, \delta) \right| d\delta d\varphi \\ &= \iint \left| \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \cos \delta \\ r \cos \varphi \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \delta \\ -r \sin \varphi \sin \delta \\ r \cos \delta \end{pmatrix} \right| d\delta d\varphi \\ &= \iint \left| \begin{pmatrix} -r^2 \cos \varphi \cos^2 \delta \\ r \sin \varphi \cos^2 \delta \\ r^2 \sin \delta \cos \delta \end{pmatrix} \right| d\delta d\varphi = r^2 \iint (\cos^4 \delta + \sin^2 \delta \cos^2 \delta)^{\frac{1}{2}} d\delta d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \delta d\delta d\varphi = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Oberflächenintegral einer skalaren Funktion

Definition: Es sei $F : \underline{\phi} : \bar{D} \rightarrow R^3$ ein Flächenstück und $f : S \rightarrow R$ mit $F \subset S \subset R^3$ eine stetige Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_F f(x) d\delta := \int_D f(\phi(u, v)) \left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right|_{(u, v)} d(u, v)$$

als Oberflächenintegral von f über F .

Motivation: \bar{D} sei der Einfachheit wegen als Rechteck vorausgesetzt. Wie bei Flächenberechnungen sei es in Rechtecke Q_1, \dots, Q_m zerlegt. Damit ist F in „Maschen“ $f(Q_i)$ aufgeteilt.

Der Flächeninhalt einer Masche ist ungefähr

$$\Delta\delta_i := \left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right|_{(u, v)} \Delta u \Delta v$$

$(u_i, v_i) \in Q_i$, Δu , Δv Kantenlängen von Q_i

Folglich liefert die Summation über $i = 1, \dots, n$ von

$$f(\phi(u_i, v_i)) \cdot \Delta\delta_i$$

und anschließender Übergang zum Integral das Oberflächenintegral in

$$\text{der Form } \int_F f(x) d\delta$$

Bsp.: Auf der Einheitskugel mit der Oberfläche

$$k : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \delta \\ r \sin \varphi \cos \delta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi], \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

sei eine Ladungsdichte $f(x, y, z) = z^2$ gegeben.

Wie groß ist die Gesamtladung?

- Parametrisierung von k ? (gegeben durch Aufgabenstellung)
- Bestimmen von „ $\underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v$ “ und $\left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right|$

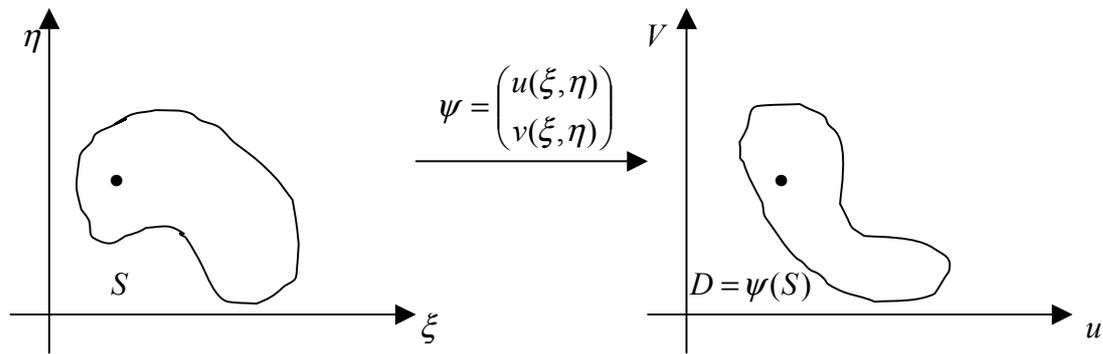
$$\underline{\phi}(\varphi, \delta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \delta \\ r \sin \varphi \cos \delta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| \underline{\phi}_\varphi \times \underline{\phi}_\delta \right| = r^2 |\cos \delta| \quad (\text{s. letztes Bsp. „Berechnung der Kugeloberfläche“})$$

- Parameterintegral berechnen

$$\begin{aligned} \int_K f(x) d\delta &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\phi(\varphi, \delta)) \cdot \left| \underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v \right| d\delta d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \delta |\cos \delta| d\delta d\varphi \\ &= r^4 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \delta \cos \delta d\delta = 2r^4 \pi \cdot \left[\frac{\sin^3 \delta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2^4 \pi \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

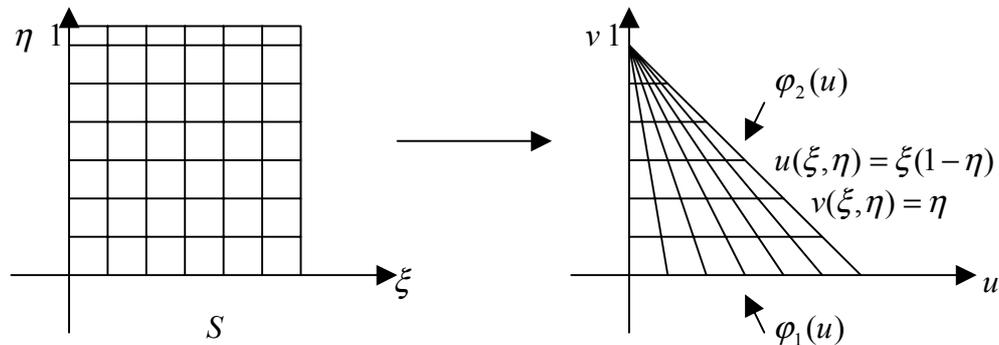
Transformationsformel für Gebietsintegral



Es gilt für stetige Skalarfelder f die Transformationsformel

$$\int_D f(u, v) d(u, v) = \int_S f(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} d(\xi, \eta)$$

Bsp.:



Sei $f(u, v) = u^2$

$$\int_D f(u, v) d(u, v) = \int_0^1 \int_0^{1-u} u^2 dv du = \int_0^1 (1-u)u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

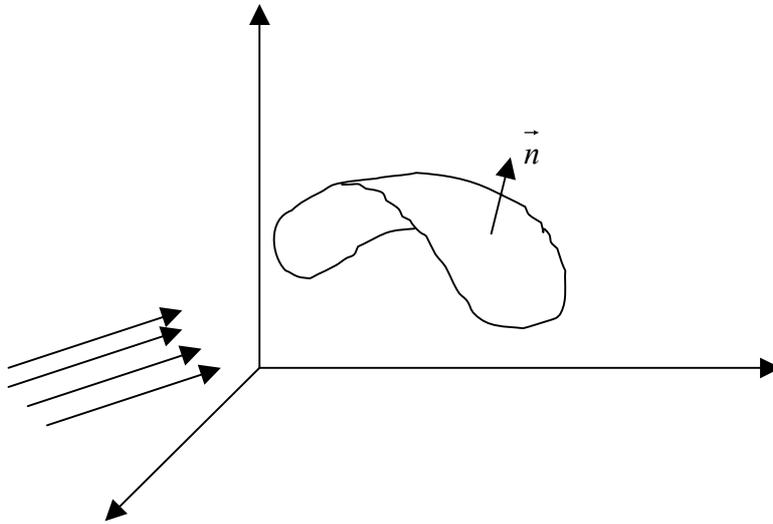
$$\int_D f(u, v) d(u, v) = \int_S f(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} d(\xi, \eta) =$$

$$= \int_S \xi^2 (1-\eta)^2 (1-\eta) d(\xi, \eta) = \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 (1-\eta^3) d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^1 \xi^2 d\xi \cdot \int_0^1 (1-\eta^3) d\eta = \frac{1}{3} \left[-\frac{(1-\eta)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}$$

Definition: Ist $F : \bar{D} \rightarrow R^3$ ein Flächenstück und $\underline{v} : S \rightarrow R^3$ mit $F \subset S \subset R^3$ ein Vektorfeld. So nennt man $\int_F \underline{v} d\delta := \int_D \underline{v}(\underline{\phi}(u, v)) \cdot (\underline{\phi}_u(u, v) \times \underline{\phi}_v(u, v)) d(u, v)$ das Oberflächenintegral des Vektorfeldes \underline{v} über das Flächenstück F . Dies wird in Anlehnung an die physikalische Bedeutung bzw. Motivation auch als Fuss von \underline{v} durch F bezeichnet.

Motivation: \underline{v} Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung
 $\underline{v} \cdot (\underline{\phi}_u(u, v) \times \underline{\phi}_v(u, v)) d(u, v) = \det(\underline{v}, \underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v) d(u, v)$ ist das Volumen, welches pro Zeiteinheit durch $d\delta$ strömt.



Somit ist $\int_F \underline{v} d\delta$ die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch F zu der durch \underline{n} ausgezeichneten Seite strömt.

Mit dem Normalenvektor

$$\underline{n} = \frac{\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v}{|\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v|}$$

und $d\delta = |\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v| d(u, v)$ folgt $d\underline{\delta} = \overbrace{(\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v)}^{\text{kein Betrag} \Rightarrow \text{hat Richtung}} d(u, v) = \underline{n} d\delta$

Damit schreibt sich das Integral auch in der Form

$$\int_F \underline{v} d\underline{\delta} = \int_F \underline{v}(x) \underline{n} d\delta$$

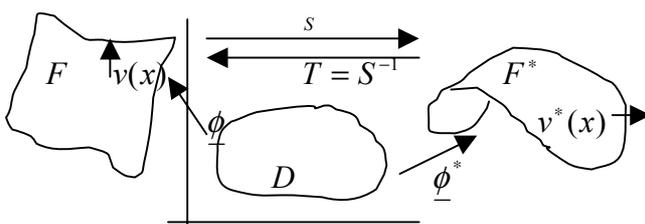
Wie oben erwähnt, gilt $\underline{v} \cdot (\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_v) = \det(\underline{v}, \underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v)$ und somit auch

$$\int_F \underline{v} d\underline{\delta} = \int_D \det(\underline{v}(\underline{\phi}(u, v)), \underline{\phi}_u(u, v), \underline{\phi}_v(u, v)) d(u, v)$$

Ist F eine Fläche aus Flächenstücken F_1, \dots, F_n zusammengesetzt ist. So definiert man als Flächenintegral einer skalaren- als auch vektorwertigen Funktion über F durch die Summe

$$\int_F \dots = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} \dots$$

Transformationsformel für Oberflächenintegrale eines Vektorfeldes



Wie verhalten sich Oberflächenintegrale unter Abb. S?

Satz: Es sei $F : \underline{x} \in \phi(u)$ ($u \in \bar{D}$) ein Flächenstück und $\underline{v} : F \rightarrow R^3$ ein Vektorfeld auf F.

Durch einen Diffeomorphismus $\underline{S} : F \rightarrow F^* (y = S(x))$ mit $\det(\nabla S) \neq 0$ wird F in einem

Flächenstück $F^* : \underline{y} = \phi^*(u) := S(\phi(u)) \ (u \in \overline{D})$ transformiert

\underline{y} geht über in $\underline{v}^* : F^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\underline{v}^*(\underline{y}) = \frac{\nabla S(x)}{\det(\nabla S(x))} v(x) \quad \text{mit } S^{-1}(y)$$

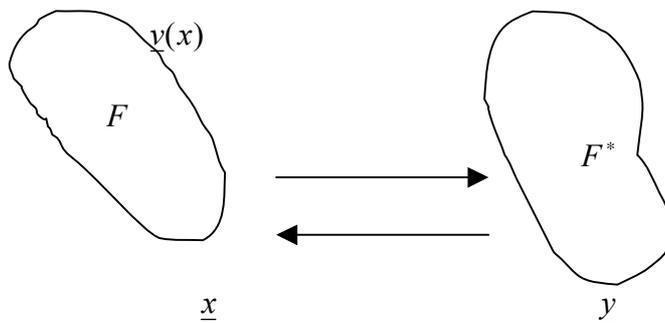
Mit der Umkehrabb. $\underline{T} = S^{-1} F^* \rightarrow F(\underline{x} = T(\underline{y}))$ kann man das $v^*(y)$ auch so schreiben

$$\underline{v}^* = (\det \nabla T)(\nabla T)^{-1} v \circ T$$

Damit gilt die Transformationsformel

$$\int_F v(x) d\underline{\delta} = \int_{F^*} v^*(y) d\underline{\delta}^* \quad \text{mit } d\underline{\delta}^* = (\phi_u^* \times \phi_v^*) d(u, v)$$

Transformationsformel für Oberflächenintegrale von Vektorfeldern



$$\int_F \underline{v}(x) d\underline{\delta} = \int_{F^*} \underline{v}^*(y) d\underline{\delta}^*$$

$$\underline{v}^* = \det(JT) \cdot (JT)^{-1} v \circ T$$

Bsp.: Gesucht ist $\int_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{\delta}$, wobei E die Oberfläche gegeben durch $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

Man sieht, daß E die Oberfläche eines Ellipsoids ist, welches sich durch die

Abb. $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$ aus der Einheitskugel ergibt.

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, JT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(JT) = 2$$

$$v^*(y) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Parametrisierung durch Kugelkoordinaten

$$\underline{\varphi}^*(\varphi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \delta \\ \sin \varphi \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (\text{andere Version als sonst})$$

$$\underline{\varphi}_\varphi^* = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \delta \\ \cos \varphi \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\varphi}_\delta^* = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \delta \\ -\sin \varphi \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_\varphi^* \times \underline{\varphi}_\delta^* = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \delta \\ \sin \varphi \cos^2 \delta \\ \cos \sin \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{\delta} &= 2 \cdot \int_K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\underline{\delta}^* = 2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \delta \\ \sin \varphi \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \delta \\ \sin \varphi \cos^2 \delta \\ \cos \sin \delta \end{pmatrix} d\delta d\varphi = \\ &= 2 \iint \underbrace{\cos^2 \varphi \cos^3 \delta + \sin^2 \varphi \cos^3 \delta + \sin^2 \delta \cos \varphi}_{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cdot \cos \varphi = \cos} d\delta d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \cos \delta d\delta \end{aligned}$$

Der Stockesche Integralsatz

Satz von Green: $\int_{\partial F} \underline{v}(x) d\underline{x} = \int_F \text{rot} \underline{v}(x) d\underline{\delta}$

Zirkulation: $v: M \rightarrow R^3$ sei ein stet. diffbares Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit in der offenen Menge $M \subseteq R^3$

In M betrachten wir eine geschlossene orientierte Jordankurve γ , die wir als stkweise glatt voraussetzen.

Das Kurvenintegral $\int_\gamma \underline{v}(x) d\underline{x}$ nennt man Zirkulation von \underline{v} rings der Kurve γ .

Die wird durch approximierende Riemann-Summen $\sum \underline{v}(x_i) \nabla x_i$ motiviert.

Jeder Summand $\underline{v}(x_i) \cdot \nabla x_i$ ist eine Geschwindigkeitskomponente in Durchlaufrichtung der Kurve.

Die Summierung gibt ein Maß dafür an, wie stark die Kurve umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve „zirkuliert“.

Wirbelstärke: In obiger Strömung mit

Geschwindigkeitsfeld $v: M \rightarrow R^3$ betrachten wir ein stkw. glattes und einfach zusammenhängendes Flächenstück F und berechnen die Zirkulation entlang der Randkurve ∂F .

$$\int_{\partial F} \underline{v}(x) d\underline{x}$$

Die mittlere Wirbelstärke erhalten wir, wenn wir durch den Flächeninhalt $A(F)$ teilen.

$$\frac{1}{A(F)} \cdot \int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x}$$

Um nun den Flächeninhalt in einem Punkt $\underline{x}_0 \in F$ zu erhalten, liegt es nahe, F und \underline{x}_0 zusammenzuziehen. Dabei nehmen wir F als eben an. (Flächennormale bleibt unverändert)

Definition: (Wirbelstärke) Es sei $\underline{v}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen) stetig diffbar. und \underline{x}_0 ein Punkt aus M .

Der Grenzwert $w_n(\underline{x}_0) = \lim_{|F| \rightarrow 0} \frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x}$ heißt Wirbelstärke von v in x_0 .

$|F|$ symbolisiert den Durchmesser von F und $A(F)$ seien Flächeninhalt.

Existenz des Grenzwertes ergibt sich aus Greenschensatz. O.B.d.A. sei F parallel zur $x-y$ -Ebene, parametrisiert durch x und y selbst, wobei die Randkurve ∂F das Flächenstück positiv umläuft. Mit

$$\partial F : \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}, a \leq t \leq b, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_a^b \underline{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b v_1(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + v_2(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt = \\ &= \int_{\partial F} v_1 dx + v_2 dy = \int_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d(x, y) = A(F) \cdot \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \cdot (x^*) \end{aligned}$$

mit geeignetem $x^* \in F$

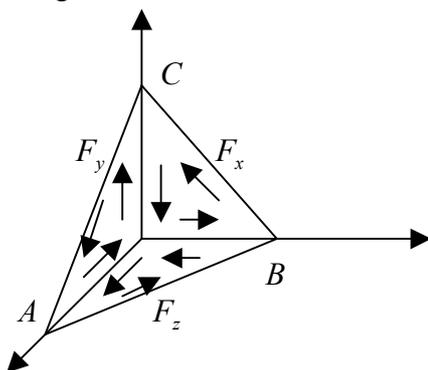
Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein solches $x^* \in F$.

Dividieren durch $A(F)$ und Kontraktion von F auf einen Punkt x_0 liefert die Wirbelstärke

$$w_n(\underline{x}_0) = (v_{2,x} - v_{1,y})(\underline{x}_0) \text{ mit } \underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Wirbelstärke:

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, daß das ebene Flächenstück schräg im Raum liegt.



F wird als kleines Dreieck $[A, B, C]$ gewählt, das mit dem Pkt. D ein Tetraeder mit den Seiten F, F_x, F_y, F_z bildet, wobei die Seiten F_x, F_y, F_z rechtwinklig zur $x-, y-$ bzw. $z-$ Achse liegt.

(Da die Existenz des Grenzwertes gesichert ist, ist die Form von F beliebig wählbar.)
 Mit den skizzierten Umlaufungen der Flächenstücke des Tetraeders folgt für die entsprechenden Kurvenintegrale

$$\int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \int_{\partial F_x} \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial F_y} \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial F_z} \underline{v} d\underline{x}$$

da sich die Integralteile über die Kanten $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ wegheben. F_z liegt parallel zur x -, y -Ebene, also folgt aus obigen Untersuchungen

$$\int_{\partial F_z} \underline{v} d\underline{x} = A(F_z) \cdot r_3 \quad \text{mit } r_3 = (v_{2,x} - v_{1,y})$$

und analog

$$\int_{\partial F_y} \underline{v} d\underline{x} = A(F_y) \cdot r_2 \quad \text{mit } r_2 = (v_{1,z} - v_{3,x})$$

$$\int_{\partial F_x} \underline{v} d\underline{x} = A(F_x) \cdot r_1 \quad \text{mit } r_1 = (v_{3,z} - v_{2,x})$$

Addition liefert:

$$\frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \frac{A(F_x)}{A(F)} \cdot r_1 + \frac{A(F_y)}{A(F)} \cdot r_2 + \frac{A(F_z)}{A(F)} \cdot r_3$$

Es gilt aber
$$\begin{cases} A(F_x) = A(F) \cos \alpha \\ A(F_y) = A(F) \cos \beta \\ A(F_z) = A(F) \cos \gamma \end{cases} \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$

wobei α, β, γ die Winkel zwischen den Flächennormalen \underline{n} und den positiven Koordinatenachsen.

Zieht man F auf einen Pkt. x_0 zusammen, wobei \underline{n} konstant bleibt, so erhält man

$$\lim_{\substack{|F| \rightarrow 0 \\ x_0 \leftarrow F}} \frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \underline{n} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Den Vektor (r_1, r_2, r_3) bezeichnet man als Rotation von \underline{v} , d.h.

$$\text{rot } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix}$$

Man beachte:
$$\text{rot } \underline{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Satz: Für ein stetig diffb. Vektorfeld $\underline{v}: M \rightarrow R^3$ ist die Wirbelstärke in $\underline{x}_0 \in M$ gleich

$$w_n(\underline{x}_0) = \lim_{\substack{|F| \rightarrow 0 \\ x_0 \in F}} \frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{v}(\underline{x}_0)$$

Man bezeichnet $\text{rot } \underline{v}$ als Wirbelfeld zu \underline{v} .

Bemerkung: Obige Formel auf Strömungen eines Geschwindigkeitsfeldes \underline{v} angewandt macht folgendes klar:
 $rotv(x_0)$ gibt die Richtung der Rotationsachse für lokale Wirbel um x_0 an.

Für die Rotationsbildung $rotv$ gelten die folgenden Rechenregeln, dabei seien $\underline{v}, \underline{w}$ stetig diffbar und $\lambda \in R$. (φ zweimal stetig diffbar)

$$rot(\underline{v} + \underline{w}) = rotv + rotw$$

$$rot(\lambda \underline{v}) = \lambda rotv$$

$$rot(\underline{x}) = rot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$rot(grad\varphi) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{zy} - \varphi_{yz} \\ \varphi_{xz} - \varphi_{zx} \\ \varphi_{yz} - \varphi_{xy} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Idee des Stokesschen Integralsatz

In einer Strömung mit Geschwindigkeitsfeld $v: M \rightarrow R^3$ ($M \subset R^3$ offen) denken wir uns ein einfaches Flächenstück $F \subset M$. Es soll die Zirkulation um das Flächenstück aus den Wirbelstärken auf F berechnet werden. Dazu zerlegen wir F in endlich viele „Maschen“ F_i

$$\int_{\partial F} \underline{v} d\underline{x} = \sum_i \int_{\partial F_i} \underline{v} d\underline{x}$$

Sind die „Maschen“ klein genug, so ist nach obigen Betrachtung jeder Summand der rechten Seite ungefähr

$$\underline{n}_i \cdot rotv(x_i) \cdot A(F_i)$$

mit einem $x_i \in F_i$ und dem Normalenvektor \underline{n}_i in x_i . Somit folgt

$$\int_{\partial F} \underline{v}(x) \cdot d\underline{x} \approx \sum_i \underline{n}_i \cdot rotv(x_i) \cdot A(F_i)$$

Grenzübergang $|F_i| \rightarrow 0$ motiviert schließlich den Stokesschen Integralsatz:

Satz: (Stokesscher Integralsatz)

Es sei $\underline{v}: M \rightarrow R^3$ ($M \subset R^3$ offen) ein stetig diffbares Vektorfeld und F ein stückweise glatt berandetes Flächenstück in M . Dann gilt

$$\int_{\partial F} \underline{v}(x) d\underline{x} = \int_F rotv(x) \cdot d\underline{\delta}$$

In Worten Die Zirkulation entlang einer Kurve die ein Flächenstück umschließt ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf dem Flächenstück.

Folgerung Es sei $v: M \rightarrow R^3$ stetig diffbar. ($M \subset R^3$ offen) und B sei ein glatt berandeter Bereich in M . Dann gilt:

$$\int_{\partial B} \text{rot} v(x) \cdot d\underline{\delta} = 0$$

Bew.: Aus ∂B schneide man ein kleines Flächenstück F heraus. Nach „Stocks“ gilt

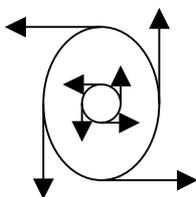
$$\int_{\partial B/F} \text{rot} v(x) \cdot d\underline{\delta} = \int_{\partial F} \underline{v}(x) \cdot d\underline{\chi}$$

Zieht man nun F auf einen Punkt $x_0 \in B$ zusammen, so folgt die Behauptung.

Bem.: Der Wirbelfluss durch eine geschlossene Fläche ist Null.

Bsp.: Konstantes Wirbelfeld

Das Vektorfeld $v(x) = \frac{1}{2} \underline{w} \times \underline{x}$ ($\underline{w}, \underline{x} \in R^3, \underline{w} \neq 0$)



Kann in der Ebene E senkrecht zu \underline{w} wie nebenstehend skizziert werden.

Es folgt

$$\text{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2} \underline{w} \times \underline{x} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_2 - w_3 y \\ w_3 x - w_1 z \\ w_1 y - w_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \underline{w}$$

Für jedes einfache Flächenstück F in der Ebene E gilt nach dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\partial F} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_F \underbrace{\underline{w}}_{\text{rot} v} \cdot d\underline{\delta} = \underline{w} \cdot \int_F d\underline{\delta} = |\underline{w}| \cdot A(F)$$

Stokescher Satz in der Ebene

Man definiert die Zirkulation in $2D$ (analog zu $3D$). γ sei eine geschlossene Jordankurve mit $\underline{x} = \underline{\gamma}(t)$ ($a \leq t \leq b$)

$$Z = \int_{\gamma} \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \int_{\gamma} v_1 dx + v_2 dy := \int_a^b \underline{v}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t) dt$$

Um läuft γ dabei ein einfach zusammenhängendes Gebiet $D \subset R^2$ im positiven Sinne, so folgt aus dem Stokesschen Integralsatz im R^3 (durch Nullsetzen der dritten Koordinaten) der Stokesche Satz in der Ebene

$$\int_{\gamma} v_1 dx + v_2 dy := \int_D \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} d(x, y)$$

Bem.: In der Ebene fallen die Sätze von Stokes, Gauß und Green zusammen, d.h. sie sind identisch.

Integral- und Differentialformel in R^n (bzw. R^3)

Nabla-Operator

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Schon kennengelernt hatten wir (φ Skalarfeld, \underline{v} Vektorfeld)

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi \quad (\text{in } R^n)$$

$$\text{div} \underline{v} = \nabla \underline{v} \quad (\text{in } R^n)$$

$$\text{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} \quad (\text{in } R^n)$$

Ist φ zweimal stetig diffbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla) \varphi = \text{div}(\text{grad} \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) \varphi =: \nabla^2 \varphi \quad (\text{kurz } \nabla^2 = \Delta)$$

Der Laplace-Operator Δ kann auch auf Vektorfelder $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ angewandt werden

$$\Delta \underline{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n)^T$$

Doppelte Anwendungen von $\text{grad}, \text{rot}, \text{div}$: Dabei seien $\underline{u}, \underline{v}: M \rightarrow R^3$ Vektorfelder und φ, ψ Skalarfelder der offenen Menge $M \subset R^3$.

- i) $\text{div}(\text{rot} \underline{u}) = 0$ (Wirbelfeld ist quellenfrei)
- ii) $\text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0$ (Gradientenfeld ist wirbelfrei)
- iii) $\text{div}(\text{grad} \delta) = \Delta \delta$
- iv) $\text{rot} \text{rot} \underline{v} = \text{grad} \text{div} \underline{v} - \underbrace{\text{div} \text{grad} \underline{v}}_{\Delta \underline{v}}$

Für Produkte gilt:

- i) $\text{grad}(\varphi \psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi$
- ii) $\text{div}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{div} \underline{v} + \underline{v} \text{grad} \varphi$
- iii) $\text{rot}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{rot} \underline{v} + \text{grad} \varphi \times \underline{v}$
- iv) $\text{grad}(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \times \text{rot} \underline{v} + \underline{v} \times \text{rot} \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{u}$
- v) $\text{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v} \text{rot} \underline{u} - \underline{u} \text{rot} \underline{v}$
- vi) $\text{rot}(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{u} \text{div} \underline{v} - \underline{v} \text{div} \underline{u} - (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{v}$

Beweis von iv)

$$(\text{grad}(u, v))_1 = (\text{grad}(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3))_1 = u_{1,x} v_1 + u_1 v_{1,x} + u_{2,x} v_2 + u_2 v_{2,x} + u_{3,x} v_3 + u_3 v_{3,x}$$

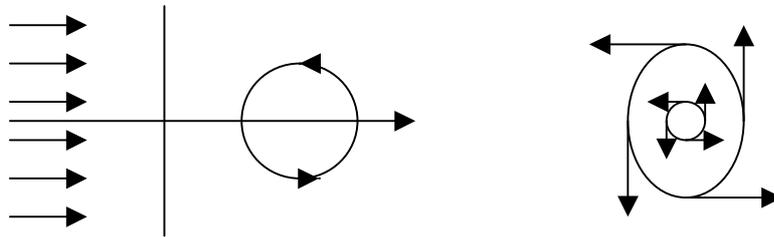
$$\text{rot} \underline{u} = \begin{pmatrix} u_{3,y} - u_{2,z} \\ u_{1,z} - u_{3,x} \\ u_{2,z} - u_{1,y} \end{pmatrix}, \quad \underline{v} \times \text{rot} \underline{u} = \begin{pmatrix} v_2(u_{2,x} - u_{1,y}) - v_3(u_{1,z} - u_{3,x}) \\ v_3(u_{3,y} - u_{2,z}) - v_1(u_{2,x} - u_{1,y}) \\ v_1(u_{1,z} - u_{3,x}) - v_2(u_{3,y} - u_{2,z}) \end{pmatrix}$$

$$(\underline{u} \times \text{rot} \underline{v} + \underline{v} \times \text{rot} \underline{u})_1 = v_2 u_{2,x} - v_2 u_{1,y} - v_3 u_{1,z} + v_3 u_{3,x} + u_2 v_{2,x} - u_2 v_{1,y} - u_3 v_{1,z} + u_3 v_{3,x}$$

$$(\underline{u} \cdot \nabla) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \quad ((\underline{u} \cdot \nabla) \underline{v})_1 = u_1 v_{1,x} + u_2 v_{1,y} + u_3 v_{1,z}$$

Zirkulation

$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$



Gaußscher und Stokesscher Integralsatz in div-, grad-, rot-Form

Wie bisher bezeichne: $\underline{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und

$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^3$

Der Bereich $B \subset M$ wie die Fläche $F \subset M$ seien stkw. glatt berandet.

Satz: Gaußscher Integralsatz in *div*-, *grad*- und *rot*-Form

$$i) \quad \int_{\partial B} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{\delta} = \int_B \text{div}(\underline{v}(\underline{x})) dF \left(= \int_{\partial B} \underline{v}(\underline{x}) \underline{n}(\underline{x}) d\delta \right)$$

$$ii) \quad \int_{\partial B} \varphi(\underline{x}) d\underline{\delta} = \int_B \text{grad} \varphi(\underline{x}) dF \left(= \int_{\partial B} \varphi(\underline{x}) \underline{n}(\underline{x}) d\delta \right)$$

$$iii) \quad \int_{\partial B} d\underline{\delta} \times \underline{v}(\underline{x}) = \int_B \text{rot} \underline{v}(\underline{x}) dF \left(= \int_{\partial B} \underline{n}(\underline{x}) \times \underline{v}(\underline{x}) d\delta \right)$$

Bew.: von ii) Setze $\underline{v}(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) \cdot \underline{a}$ ($\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ beliebig)

Einsetzen in i) liefert

$$\int_{\partial B} \varphi(\underline{x}) \underline{a} d\underline{\delta} = \int_{\partial B} \varphi(\underline{x}) \underline{a} \underline{n}(\underline{x}) d\delta = \underline{a} \int_{\partial B} \varphi(\underline{x}) \underline{n}(\underline{x}) d\delta = \underline{a} \int_{\partial B} \varphi(\underline{x}) d\underline{\delta}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{i)}{=} \int_{\partial B} \underbrace{\operatorname{div}(\varphi(\underline{x})\underline{a})}_{=0} dF = \underline{a} \cdot \int_B \nabla \varphi(\underline{x}) dF \\
& = \varphi(\underline{x}) \cdot \underbrace{\operatorname{div}(\underline{a})}_{=0} + \nabla \varphi(\underline{x}) \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \nabla \varphi(\underline{x})
\end{aligned}$$

Bew.: von iii) Setze $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{a} \times \underline{w}(\underline{x})$ mit $(\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ beliebig})$

Aus i) folgt

$$\operatorname{div}(\underline{a} \times \underline{w}) = -\underline{a} \cdot \operatorname{rot} \underline{w} \Rightarrow \int_{\partial B} (\underline{a} \times \underline{w}(\underline{x})) \cdot d\underline{\delta} = - \int_B \underline{a} \cdot \operatorname{rot} \underline{w} dF$$

Es gibt $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$

Also folgt

$$\int_{\partial B} (\underline{a} \times \underline{w}(\underline{x})) \cdot d\underline{\delta} = \int_{\partial B} \underline{w}(\underline{x}) \times \underline{n}(\underline{x}) \cdot d\underline{\delta} = -\underline{a} \cdot \int_B \operatorname{rot} \underline{w} dF$$

Merke: Volumenintegrale über div -, grad ..., rot ... lassen sich in Oberflächenintegrale umwandeln.

Satz: Stokesscher Integralsatz in div , ∇ – und rot – Form

$$\begin{aligned}
i) \quad & \int_{\partial F} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_F \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{x}) d\underline{\delta} \\
ii) \quad & \int_{\partial F} \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = \int_F d\underline{\delta} \times \operatorname{grad} \varphi(\underline{x}) \\
iii) \quad & \int_{\partial F} d\underline{x} \times \underline{v}(\underline{x}) = \int_F (d\underline{\delta} \times \nabla) \times \underline{v}(\underline{x})
\end{aligned}$$

Man beachte $d\underline{\delta} = \underline{n}(\underline{x}) d\delta$ und $d\underline{x} = \underline{T}(\underline{x}) ds$, dabei sei \underline{n} Flächennormale und \underline{T} Tangenteneinheitsvektor an ∂F

Bew.: von ii) Setze $\underline{v}(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})\underline{a}$ ($\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ beliebig)

$$\begin{aligned}
\underline{a} \cdot \int_{\partial F} \varphi(\underline{x}) d\underline{x} &= \int_{\partial F} \varphi(\underline{x}) \cdot \underline{a} d\underline{x} = \int_F \underbrace{\operatorname{rot}(\varphi(\underline{x})\underline{a})}_{\varphi \operatorname{rot} \underline{a} + \nabla \varphi \times \underline{a}} d\underline{\delta} = \int_F (\nabla \varphi \times \underline{a}) d\underline{\delta} = \\
&\Rightarrow \int_{\partial F} \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = \int_F d\underline{\delta} \times (\nabla \varphi(\underline{x}))
\end{aligned}$$

Partielle Integration

Aus der eindimensionalen Analysis ist die Formel

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

der partiellen Integration bekannt. In 3D gibt es mehrere Gegenstücke dazu. Sie ergeben sich aus dem Gaußschen-Integralsatz, in dem man die Diff-Operatoren div , grad , rot auf Produkte von Feldern anwendet.

i) Aus $\operatorname{grad}(\varphi(x) \cdot \psi(x)) = \varphi(x) \operatorname{grad} \psi(x) + \psi(x) \operatorname{grad} \varphi(x)$ folgt

$$\int_{\partial B} \varphi(x) \psi(x) d\underline{\delta} = \int_B \varphi(x) \operatorname{grad} \psi(x) + \psi(x) \operatorname{grad} \varphi(x) dF$$

$$\text{z.B. } \varphi(x) = 1 \Rightarrow \int_{\partial B} \psi(x) n(x) d\underline{\delta} = \int_B \operatorname{grad} \psi(x) dF$$

ii) Aus $\operatorname{div}(\varphi(x) \cdot \underline{v}(x)) = \varphi(x) \operatorname{div} \underline{v}(x) + \operatorname{grad} \varphi(x) \cdot \underline{v}(x)$ folgt

$$\int_{\partial B} \varphi(x) \cdot \underline{v}(x) d\underline{\delta} = \int_B \varphi(x) \operatorname{div} \underline{v}(x) + \operatorname{grad} \varphi(x) \cdot \underline{v}(x) dF$$

iii) Aus $\operatorname{div}(\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{w} \cdot \operatorname{rot} \underline{v} - \underline{v} \cdot \operatorname{rot} \underline{w}$ folgt

$$\int_{\partial B} (\underline{v} \times \underline{w}) d\underline{\delta} = \int_B \underline{w} \cdot \operatorname{rot} \underline{v} - \underline{v} \cdot \operatorname{rot} \underline{w} dF$$

iv) Aus $\operatorname{rot}(\varphi(x) \underline{v}(x)) = \varphi(x) \cdot \operatorname{rot} \underline{v}(x) + \operatorname{grad} \varphi(x) \times \underline{v}(x)$ folgt

$$\int_{\partial B} d\underline{\delta} \times (\varphi(x) \underline{v}(x)) = \int_B \varphi(x) \cdot \operatorname{rot} \underline{v}(x) + (\operatorname{grad} \varphi(x)) \times (\underline{v}(x)) dF$$

Krummlinige orthogonale Koordinaten

Orthogonale Transformation

Koordinatentransformationen im R^3 werden beschrieben durch

$$\underline{x} = \underline{T}(\underline{u}), \underline{u} \in D \text{ mit } T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

$T : D \rightarrow G$ bildet $D \subset R^3$ auf $G \subset R^3$ ab.

T sei umkehrbar eindeutig und es gelte $\forall \underline{u} \in D$

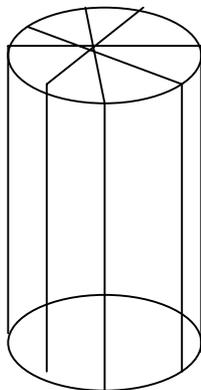
$$\det(T') > 0 \text{ und } \frac{\partial T}{\partial U_i} \bullet \frac{\partial T}{\partial U_j} = 0 \quad (i \neq j) \quad \leftarrow \text{senkrecht aufeinander}$$

Letzteres besagt, dass die Spalten von T' paarweise aufeinander stehen \Rightarrow orthogonale Koordinatentransfo T'

$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ seien die „alten“ kartesischen Koordinaten und $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ seien die „neuen“ krummlinigen Koordinaten. Die Kurve, die durch

$$\left. \begin{aligned} \underline{x} &= \underline{T}(t, u_2, u_3) \\ \underline{x} &= \underline{T}(u_1, t, u_3) \\ \underline{x} &= \underline{T}(u_1, u_2, t) \end{aligned} \right\} t \text{ variabel, beschrieben werden, heißen Koordinatenlinien}$$

Bsp. Zylinderkoordinaten



Die Vektoren $\underline{l}_i = \frac{\underline{T}_{u_i}}{|\underline{T}_{u_i}|}$ ($i = 1, 2, 3$) $\left(\underline{T}_{u_i} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial u_i} \right)$ bilden für jedes $\underline{u} \in D$ ein orthogonales Rechtssystem. (d.h. $\underline{l}_i \bullet \underline{l}_j = \delta_{ij}$, $\det(\underline{l}_1, \underline{l}_2, \underline{l}_3) = 1$)

Orthogonale Koordinatentransformation

$$\underline{x} = T(\underline{u}), \underline{u} \in D \quad T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

Vor: $\det(\nabla T) > 0$ und $\frac{\partial T}{\partial U_i} \bullet \frac{\partial T}{\partial U_j} = 0 \quad (i \neq j)$

Die Vektoren $\underline{e}_i = \frac{\underline{T}u_i}{|\underline{T}u_i|}$ bilden für jedes $\underline{u} \in D$ ein orthogonales Rechtssystem.

($T : D \rightarrow G$ bilden $D \subset R^3$ auf $G \subset R^3$ ab)

Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

$\underline{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$
 Vektorfeld Skalarfeld

Die Funktionsgleichungen $\underline{y} = \underline{v}(\underline{x})$, $\lambda = \varphi(\underline{x})$ werden durch $\underline{x} = \underline{T}(\underline{u})$ transformiert in

$$\underline{y} = \underline{v}(\underline{T}(\underline{u})) =: \tilde{v}(\underline{u}), \lambda = \varphi(\underline{T}(\underline{u})) =: \tilde{\varphi}(\underline{u})$$

Für bel. $\underline{u} \in D$ sei $(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \underline{\varphi}_3)$ ein orthogonales Rechtssystem. Damit lässt sich $\tilde{v}(\underline{u})$ als Linearkombination der \underline{e}_i schreiben

$$\tilde{v}(\underline{u}) = v^1 \underline{e}_1 + v^2 \underline{e}_2 + v^3 \underline{e}_3 \quad \text{mit} \quad v^i = \tilde{v} \underline{e}_i$$

Bem.: Man beachte, dass sowohl v^i als auch \underline{e}_i von \underline{u} abhängen!

Wir nennen v^1, v^2, v^3 die Koordinaten von \underline{v} entlang der Koordinatenlinien.

Da sowohl v^i als auch \underline{e}_i von \underline{u} abhängen, erhält man die part. Ableitung mittels Produktregel.

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \underline{e}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_k} \tilde{v} = \sum_{i=1}^3 (v_{Uk}^i \underline{e}_i + v^i \underline{e}_{i,Uk})$$

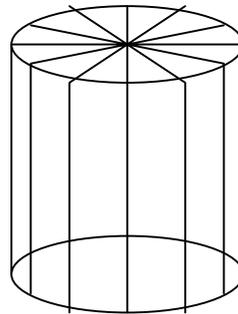
Bsp.: Zylinderkoordinaten

Berechne die part. Abl.

nach r, φ und z für die

Vektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$ bei den

Zylinderkoordinaten und $\underline{v}(x, y, z) = (y, -z, 1)^T$



$$(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)^T = \underline{T}(r, \varphi, z)$$

$$\underline{T}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_r| = 1 \Rightarrow \underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_\varphi| = r \Rightarrow \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_z| = 1 \Rightarrow \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}(r, \varphi, z) = \underline{v}(\underline{T}(r, \varphi, z)) = \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} = v^r \underline{e}_r + v^\varphi \underline{e}_\varphi + v^z \underline{e}_z$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial r} (v^r \underline{e}_r + v^\varphi \underline{e}_\varphi + v^z \underline{e}_z) = & \left| \underline{v}^r = \tilde{v}(r, \varphi, z) \cdot \underline{e}^r = \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \right. \\
&= v_r^r \underline{e}_r + v_r^r \underline{e}_{r,r} + v_r^\varphi \underline{e}_\varphi + v_r^\varphi \underline{e}_{\varphi,r} + v_r^z \underline{e}_z + & = r \sin \varphi \cos \varphi \\
&+ v_r^z \underline{e}_{z,r} = \sin \varphi \cos \varphi \underline{e}_{r,r} + (r \sin \varphi \cos \varphi) \cdot \underline{0} + & \underline{v}^\varphi = -r \sin^2 \varphi - z \cos \varphi \\
&(-\sin^2 \varphi) \cdot \underline{e}_\varphi + (-r \sin^2 \varphi - z \cos \varphi) \cdot \underline{0} + 0 \cdot \underline{e}_z + & \underline{v}^z = 1 \\
&+ 1 \cdot \underline{0} = \sin \varphi \cos \varphi \underline{e}_{r,r} - \sin^2 \varphi \underline{e}_\varphi = \\
&= \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^3 \varphi \\ -\sin^2 \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Differentialoperatoren grad, div, rot, Δ in krummlinigen Koordinaten

Wir verwenden obige Notation und $g_i := |T_{u_i}|$

Betrachten wir $(\text{grad } \psi) \cdot \underline{e}_i$

Mit $\underline{x} = T(\underline{u})$, $\frac{\partial x_k}{\partial u_i} = T_{k,u_i}$ ergibt sich

$$\otimes (\text{grad } \psi) \cdot \underline{e}_i = (\text{grad } \psi) \cdot \frac{T_{u_i}}{g_i} = \frac{1}{g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \frac{1}{g_i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i}$$

Durchmultiplikation von \otimes mit \underline{e}_i liefert

$$\text{grad } \psi(x) = \frac{\underline{e}_1}{g_1} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} + \frac{\underline{e}_2}{g_2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} + \frac{\underline{e}_3}{g_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3}$$

$$\text{symbolisch: } \nabla = \frac{\underline{e}_1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\underline{e}_2}{g_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\underline{e}_3}{g_3} \frac{\partial}{\partial u_3}$$

Bsp.: Zylinderkoordinaten

Bestimme den Gradienten von $\tilde{\psi}(r, \varphi, z) = r^2 + z^2$

Es gilt $\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ und somit $\nabla \psi = 2(x, y, z)^T \Rightarrow \nabla \psi = 2 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$

$$\nabla \psi = \underline{e}_r \cdot 2r + \frac{1}{r} \underline{e}_\varphi \cdot 0 + \underline{e}_z \cdot 2z = 2(r \underline{e}_r + z \underline{e}_z) =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Setzen wir $u_1 = \varphi(x)0(T^{-1})_1(x)$, so erhalten wir

$$\nabla u_1 = \frac{e_1}{g_1} \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial u_1}}_{=1} + \frac{e_2}{g_2} \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial u_2}}_{=0} + \frac{e_3}{g_3} \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial u_3}}_{=0} = \frac{e_1}{g_1}$$

$$\Rightarrow g_1 \nabla u_1 = e_1 \text{ (allg. : } g_i \nabla u_i = e_i \text{)}$$

Man beachte nun

$$\operatorname{div} \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \nabla \sum_{i=1}^3 v^i e_i = \sum_{i=1}^3 \nabla v^i e_i$$

$$\text{Mit } e_i = e_2 \times e_3 = g_2 g_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$$

$$\text{Daraus folgt } \nabla(v^1 e_1) = \nabla(g_2 g_3 v^1 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)) =$$

$$g_2 g_3 v^1 \underbrace{\nabla(\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{=0} + \underbrace{(\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{\frac{e_1}{g_2 g_3}} \nabla(g_2 g_3 v^1)$$

$$\text{Es gilt } \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = \nabla u_3 \cdot (\nabla \times \nabla u_2) = \nabla u_2 \cdot (\nabla \times \nabla u_3) = 0,$$

$$\text{da } (\nabla \times \nabla u_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} u_i = 0$$

$$\text{Somit gilt } \nabla(v^1 e_1) = \frac{1}{g_2 g_3} e_1 \nabla(g_2 g_3 v^1) \stackrel{\circledast}{=} \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 v^1)$$

Entsprechendes gilt für $i = 2, 3$

Somit gilt

$$\operatorname{div} \underline{v}(x) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 v^1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (g_1 g_3 v^2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 g_2 v^3) \right)$$

Analoge Rechnung ergeben sich für *rot* und ∇ .

Satz: Es gilt

$$\operatorname{grad} \psi(x) = \frac{e_1}{g_1} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} + \frac{e_2}{g_2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} + \frac{e_3}{g_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3}$$

$$\operatorname{div} \underline{v}(x) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 v^1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (g_1 g_3 v^2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 g_2 v^3) \right)$$

$$\operatorname{rot} \underline{v}(x) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} g_1 e_1 & g_2 e_2 & g_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 v^1 & g_2 v^2 & g_3 v^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \psi(x) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{g_1 g_2 g_3}{g_i^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i} \right)$$

grad, div, rot, Δ für Zylinderkoordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(r, \varphi, z) \quad \underline{v}(x) = v^r \underline{e}_r + v^\varphi \underline{e}_\varphi + v^z \underline{e}_z$$

$$\text{grad} \psi(x) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \underline{e}_z$$

$$\text{div}(\underline{v}(x)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \frac{\partial v^z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(x) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2}$$

$$\text{rot}(\underline{v}(x)) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \underline{e}_r & r \underline{e}_\varphi & \underline{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v^r & r v^\varphi & v^z \end{vmatrix}$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin \Theta \cos \varphi$
 $y = r \sin \Theta \sin \varphi$
 $z = r \cos \Theta$

$$\underline{T}_r = \begin{pmatrix} \sin \Theta \cos \varphi \\ \sin \Theta \sin \varphi \\ \cos \Theta \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_r|^2 = \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \Theta = 1$$

$$\underline{T}_\Theta = \begin{pmatrix} r \cos \Theta \cos \varphi \\ r \cos \Theta \sin \varphi \\ -r \sin \Theta \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_\Theta|^2 = r^2 (\cos^2 \Theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \Theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \Theta) = r^2$$

$$\underline{T}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \Theta \sin \varphi \\ r \sin \Theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\underline{T}_\varphi|^2 = r^2 (\sin^2 \Theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \Theta$$

$$\Rightarrow \underline{e}_r = \underline{T}_r, \quad \underline{e}_\Theta = \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \varphi \\ \cos \Theta \sin \varphi \\ -\sin \Theta \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} \psi(x) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Theta} \underline{e}_\Theta + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\text{div}(\underline{v}(x)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v^r) + \frac{1}{r \sin \Theta} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta v^\Theta) + \frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{rot}\underline{v}(\underline{x}) = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \begin{vmatrix} \underline{e}_r & r\underline{e}_\Theta & r \sin \Theta \underline{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v^r & rv^\Theta & r \sin \Theta v^\varphi \end{vmatrix}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2}$$

Definition kartesischer Tensoren

Physikalische Gesetze sind unabhängig von den Koordinatensystemen, d.h. ihre Formulierung bleibt unverändert bei dem Wechsel von einem rechtsorientierten kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen.

⇒ vektoren, Tensoren mit denen physikalische Größen beschrieben werden, haben Invarianzeigenschaften beim Koordinatenwechsel

Transformation durch Drehung

(b_1, b_2, b_3) (b'_1, b'_2, b'_3) seien zwei rechtsorientierte Orthonormalbase.

$$(b_i \cdot b_k = \delta_{ik}, \det(b_1, b_2, b_3) = 1)$$

$$\otimes \quad \underline{x} = \xi_1 \underline{b}_1 + \xi_2 \underline{b}_2 + \xi_3 \underline{b}_3, \quad \xi_k = \underline{b}_k \cdot \underline{x}$$

$$\otimes \otimes \quad \underline{x} = \xi'_1 \underline{b}'_1 + \xi'_2 \underline{b}'_2 + \xi'_3 \underline{b}'_3, \quad \xi'_k = \underline{b}'_k \cdot \underline{x}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die Koordinaten von \underline{x} bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3) . Das zugehörige Koordinatensystem sei mit $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ bezeichnet.

Setzt man \underline{x} aus \otimes in $\xi'_k = \underline{b}'_k \cdot \underline{x}$ ein, so gilt

$$\xi'_k = \xi_1 \cdot \underline{b}'_k \cdot \underline{b}_1 + \xi_2 \cdot \underline{b}'_k \cdot \underline{b}_2 + \xi_3 \cdot \underline{b}'_k \cdot \underline{b}_3$$

bzw. analog \underline{x} aus $\otimes \otimes$ in $\xi_k = \underline{b}_k \cdot \underline{x}$:

$$\xi_k = \xi'_1 \cdot \underline{b}_k \cdot \underline{b}'_1 + \xi'_2 \cdot \underline{b}_k \cdot \underline{b}'_2 + \xi'_3 \cdot \underline{b}_k \cdot \underline{b}'_3$$

Für $k = 1, 2, 3$ erhält man:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}'_1 \cdot \underline{b}_1 & \underline{b}'_1 \cdot \underline{b}_2 & \underline{b}'_1 \cdot \underline{b}_3 \\ \underline{b}'_2 \cdot \underline{b}_1 & \underline{b}'_2 \cdot \underline{b}_2 & \underline{b}'_2 \cdot \underline{b}_3 \\ \underline{b}'_3 \cdot \underline{b}_1 & \underline{b}'_3 \cdot \underline{b}_2 & \underline{b}'_3 \cdot \underline{b}_3 \end{pmatrix}}_{:= A \text{ mit } a_{ij} = \underline{b}'_i \cdot \underline{b}_j} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix}$$

Führt man folgende Matrizen und Vektoren ein:

$$B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3), \quad B' = (\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_3)$$

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\xi}' = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix}$$

so lauten obige Gleichungen:

$$\underline{x} = B \cdot \underline{\xi} \quad \underline{\xi} = B^T \cdot \underline{x} \quad (= B^T B \underline{\xi} = B^T B \underline{\xi})$$

$$\underline{x} = B' \cdot \underline{\xi}' \quad \underline{\xi}' = B'^T \cdot \underline{x}' \quad (= B'^T B \underline{\xi}' = B'^T B \underline{\xi}')$$

$$\underline{\xi}' = A \cdot \underline{\xi} \text{ mit } A = B'^T \cdot B, \quad \underline{\xi} = A^T \underline{\xi}'$$

A heißt Transformationsmatrix. Für B gilt: $B^T B = I$

⇒ $B^T = B^{-1}$ und $\det B = 1$, [da $\det(B^T B) = I$], und $B \cdot B^T = 1$

Damit folgt für die Matrix A :

$$A \cdot A^T = (B'^T \cdot B)(B^T \cdot B') = B'^T \cdot B' = I$$

$$A^T \cdot A = (B'^T \cdot B')(B'^T \cdot B) = B^T \cdot B = I$$

und somit

$$A^{-1} = A^T \text{ und } \det(A) = 1$$

A ist also eine Drehmatrix, welche eine Drehung des k -Systems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ in $0, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ bewirkt.

Tensoren zweiter Stufe

Es sei $I : R^3 \rightarrow R^3$ eine beliebige lineare Abbildung des R^3 in sich. Bekanntlich lässt sich eine solche Abb. Bzgl. eines bel. Koordinatensystems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ mit Basis

$B = (b_1, b_2, b_3)$ als Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \text{ darstellen.}$$

Die Funktionengleichung $\underline{y} = T(\underline{x})$ wird durch $\underline{\eta} = T\underline{\xi}$ beschrieben, wobei $\underline{x} = \sum_{k=1}^3 \xi_k \underline{b}_k$,

$$\underline{y} = \sum_{k=1}^3 \eta_k \underline{b}_k \text{ gilt.}$$

Definition: Ein Tensor zweiter Stufe ist die Menge von Matrizen $T = (t_{ik})_B$ zu einer linearen Abb. $I : R^3 \rightarrow R^3$, und zwar für alle rechtsorientierten Orthonormalbasen B des R^3 .

Betrachten wir den Übergang von zwei Matrizen $T = (t_{ik})_B, T' = (t'_{ik})_B$.

Es gilt:

$$\underline{\eta} = T \cdot \underline{\xi}, \quad \underline{\eta}' = T' \cdot \underline{\xi}' \quad \text{mit} \quad \underline{\xi}' = A \cdot \underline{\xi}, \quad \underline{\eta}' = A \cdot \underline{\eta}$$

Einsetzen liefert:

$$\underline{\eta}' = T' \underline{\xi}' \Rightarrow A \cdot \underline{\eta} = T' \cdot A \cdot \underline{\xi} \Rightarrow \underline{\eta} = A^T \cdot T' \cdot A \cdot \underline{\xi} \Rightarrow T = A^T \cdot T' \cdot A$$

Umgeschrieben lautet dies:

$$T' = A \cdot T \cdot A^T, \text{ d.h. } t'_{ik} = \sum_{pq=1}^3 a_{ip} \cdot t_{pq} \cdot a_{kq} = \sum_{pq} a_{i\underline{p}} \cdot a_{\underline{kq}} \cdot t_{\underline{pq}}$$

Tensoren n-ter Stufe

Ein n-ter Stufe ($n \in N$) wird bzgl. des Koordinatensystems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ durch B^n reelle Zahlen

$$t_{ij\dots k} \text{ (mit } n \text{ Indizes } i, j, \dots, k \in \{1, 2, 3\})$$

dargestellt. Wir beschreiben das System dieser Zahlen auch durch $T = (t_{ij\dots k})_B$.

Bzgl. eines anderen k-Systems $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ mit rechtsorientierter Basis B' wird der Tensor durch $T' = (t'_{ij\dots k})_{B'}$ dargestellt, wobei sich die $t'_{ij\dots k}$ durch

$$\otimes t'_{ij\dots k} = \sum_{pq\dots r} a_{ip} \cdot a_{iq} \cdot \dots \cdot a_{kr} \cdot t_{pq\dots r} \text{ ergeben, wobei } A = B'^T B$$

Definition: Kartesische Tensoren im R^3

- a) Ein Schema von reellen Zahlen $t_{ij\dots k}$ (mit n Indizes $i, j, \dots, k \in \{1, 2, 3\}$) welches wir mit einer rechtsorientierten Orthonormalbasis B des R^3 zu einem Paar verbinden, schreiben wir in der Form $T = (t_{ij\dots k})_B$. Ist $T' = (t'_{ij\dots k})_{B'}$ ein zweites Paar dieser Art, wobei der Zusammenhang \otimes besteht, so heißen T und T' äquivalent.
- b) Eine Äquivalenzklasse solcher Ausdrücke T heißt ein (kartesischer) Tensor n -ter Stufe.

Einsteinsche Summenkonvention

Tritt bei einer indizierten Größe oder einem Produkt solcher Größen ein Index doppelt auf, so wird über alle möglichen Werte dieses Index summiert.

Die Gleichungen $\underline{x} = \sum_{k=1}^3 \xi_k b_k$, $t'_{ik} = \sum_{pq=1}^3 a_{ip} a_{kp} t_{pq}$ erhalten somit folgende prägnante Form:

$$\underline{x} = \xi_k b_k \quad t'_{ik} = a_{ip} a_{kp} t_{pq}$$

All Konvention

Tritt in einem Summanden einer Tensorgleichung ein Index genau einmal auf, so gilt diese für alle Werte des Index.

Rechenregeln für Tensoren

Seien durch $T = (t_{ik\dots n})_B$, $S = (s_{ik\dots n})_B$ zwei Tensoren n -ter Stufe dargestellt, und $\lambda \in R$.

$$T + S = (t_{ik\dots n} + s_{ik\dots n})_B$$

$$S - T := S + (-T)$$

$$\lambda \cdot T = (\lambda \cdot t_{ik\dots n})_B$$

$$-T = (-t_{ik\dots n})_B$$

Tensoren gleicher Stufe erfüllen die Gesetze eines Vektorraums.

Assoziativgesetz: $(T + S) + V = T + (S + V)$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot T = \lambda \cdot (\mu \cdot T)$$

Kommutativgesetz: $T + S = S + T$

Distributivgesetz: $\lambda(T + S) = \lambda T + \lambda S$

$$(\lambda + \mu)T = \lambda T + \mu T$$

sowie: $T + 0 = T$, $T - T = 0$, $1 \cdot T = T$

sei $T = (t_{i...k})_B$ Tensor n-ter Stufe und $S = (S_{p...q})_B$ Tensor m-ter Stufe. Das Tensorprodukt $T \cdot S = W = (W_{i...kp...q})_B$ ist definiert durch $W_{i...kp...q} = t_{i...k} \cdot S_{p...q}$. Das Produkt ist von der Ordnung $n + m$.

Symmetrie und Antisymmetrie

Ein Tensor T der Stufe 2, mit $T = (t_{ik})_B$ heißt symmetrisch, wenn $t_{ki} = t_{ik}$ für alle i, k gilt und antisymmetrisch, wenn $t_{ki} = -t_{ik}$ für alle i, k gilt.

symmmtrischer Tensor $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$	antisymmetrischer Tensor $T = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$
--	--

Folgerung: Jeder Tensor der Stufe 2 läßt sich in eine Summe aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor zerlegen. Dies hat die Darstellung

$$t_{ik} = \frac{1}{2}(t_{ik} + t_{ki}) + \frac{1}{2}(t_{ik} - t_{ki}).$$

Verjüngung:

$T = [t_{ij...k}]_B$ sei ein Tensor. Setzt man in $t_{ij...k}$ zwei Indizes gleich und summiert über diesen gemeinsamen Index, so erhält man einen neuen Tensor T_0 .

Man nennt diesen Tensor eine Verjüngung, z.B.

$$T = [t_{ij}]_B \rightarrow T_0 = [t_{iik}]_B = [t_k]_B \text{ mit } t_k = t_{iik} = \sum_{i=1}^3 t_{iik}$$

Bei der Verjüngung verringert sich der Grad um 2.

Divisionsregel:

Wir betrachten eine Abbildung der Tensoren S m-ter Stufe in der Menge der Tensoren T n-ter Stufe, die folgendermaßen beschrieben wird

$$t_{i...k} = w_{i...kp...q} S_{p...q} \text{ mit } T = (t_{i...k})_B \in \underline{T} \text{ und } S = (S_{p...q})_B \in \underline{S}$$

Damit folgt:

Die Schemata $(w_{i...kp...q} S_{p...q})_B$ bilden einen Tensor der Stufe $(m + n)$.

Invariante Tensoren:

Ein Tensor U heißt invariant, wenn er bezüglich aller rechtsorientierten Orthogonalbasen B das gleiche Zahlenschema $[u_{i...k}]_B$ aufweist.

Genauer:

Sind $(u_{i...k})_B$, $(u'_{i...k})_{B'}$ zwei Repräsentanten des Tensors T , so gilt $u_{i...k} = u'_{i...k}$ für jede Kombination von $i...k$.

Deltatensor:

Der wichtigste Tensor 2. Stufe ist der Deltatensor E der Stufe 2, der durch $(\delta_{ik})_B$

repräsentiert wird mit $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Epsilontensor:

Betrachten wir die Permutationen der Zahlen 1,2,3 .

Es gibt $3! = 6$ Permutationen. Diese sind

(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) gerade Permutationen (gerade Anzahl an Vertauschungen)

(2,1,3), (1,3,2), (3,2,1) ungerade Permutation

Damit wird das Symbol ε_{ijk} wie folgt definiert

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind} \\ 1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation ist} \\ -1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation ist} \end{cases}$$

Der ε -Tensor ist ein invarianter Tensor 3. Stufe

Folgerung: Zusammenhang zwischen Delta- und Epsilontensor.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rsk} = \delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}$$

Folgerung: Epsilontensor und Kreuzprodukt

Es seien $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ zwei Vektoren des R^3 . Die

Komponenten des Kreuzprodukts $\underline{a} \times \underline{b}$ werden durch $(\underline{a} \times \underline{b})_i$ ($i = 1, 2, 3$)

beschrieben, insbesondere gilt:

$$(\underline{a} \times \underline{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = -\varepsilon_{ikj} a_j b_k = -\varepsilon_{ijk} b_j a_k = -(\underline{b} \times \underline{a})_i$$

Ersetzt man \underline{a} durch den ∇ - Operator, so gilt

$$(\text{rot } \underline{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Satz: Jeder invariante Tensor 4. Stufe mit dem einheitlichen Repräsentanten $(u_{ijkl})_B$

lässt sich in folgender Form schreiben

$$u_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu \delta_{ik} \delta_{jm} + \nu \delta_{im} \delta_{jk} \quad (\lambda, \mu, \nu \in R)$$

Bsp.: Lineare Elastizitätstheorie

Durch ε_{ik} sei der Verzerrungstensor bei kleinen Dehnungen eines elastischen Körpers

beschrieben und durch σ_{ik} der dadurch erzeugte Spannungstensor. Es sei hier ein

isotroper und homogener Körper betrachtet. Der lineare Zusammenhang der beiden

Größen ε_{ik} und σ_{ik} lässt sich beschreiben durch

$$\sigma_{ik} = u_{ikpq} \varepsilon_{pq} \quad \otimes$$

Der Tensor $U = (u_{ikpq})_B$ spiegelt eine Materialeigenschaft wieder

Da Material isotrop ist, hat U die Darstellung

$$u_{ikpq} = \lambda \delta_{ik} \delta_{pq} + \mu \delta_{ip} \delta_{uq} + \nu \delta_{iq} \delta_{kp}$$

Einsetzen in \otimes liefert

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \delta_{pq} \varepsilon_{pq} + \mu \delta_{ip} \delta_{kq} \varepsilon_{pq} + \nu \delta_{iq} \delta_{kp} \varepsilon_{pq} = \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{pp} + \mu \varepsilon_{ik} + \nu \varepsilon_{ki}$$

Da Spannungs- und Verzerrungstensor sym. sind, ergibt sich, dass

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{pp} + (\mu + \nu) \varepsilon_{ik}$$

Mit in der Technik üblichen Konstantenbezeichnungen G und m , die mit λ, μ, ν wie folgt zusammenhängen

$$\lambda G = \mu + \nu, \quad \lambda = \frac{2G}{m-2}, \quad m > 2$$

Damit folgt das Hooksche-Dehnungsgesetz

$$\sigma_{ik} = 2G \left(\frac{\varepsilon_{pq} \delta_{ik}}{m-2} + \varepsilon_{ik} \right)$$

Tensoranalysis

M sei eine offene Teilmenge des R^3 . Eine Abb. \underline{F} von M in der Menge der Tensoren n -ter Stufe bezeichnen wir als Tensorfeld.

Wir beschreiben das Tensorfeld durch

$$\underline{T} = \underline{F}(x), \quad x \in M$$

oder mit Hilfe eines Repräsentanten $T = (t_{ij\dots k})_B$, $F(x) = (f_{ij\dots k}(x))_B$ auch durch $T = F(x)$

in Komponenten $t_{ij\dots k} = f_{ij\dots k}(x)$

Die Ableitung der $t_{ij\dots k} = f_{ij\dots k}(x)$ nach $\underline{x} = \underline{\xi}_i \underline{b}_i$

$B = (b_1 b_2 b_3)$ werden folgendermaßen symbolisiert

$$\frac{\partial t_{ij\dots k}(x)}{\partial \xi_p} =: t_{ij\dots k,p}, \quad \frac{\partial^2 t_{ij\dots k}(x)}{\partial \xi_p \partial \xi_q} =: t_{ij\dots k,pq} \quad \text{USW.}$$

Satz: Es sei \underline{F} ein stetig diffb. Tensorfeld n -ter Stufe auf einer offenen

Menge $M \subset R^3$, beschrieben durch $t_{ij\dots k} = f_{ij\dots k}(x)$ mit $\underline{x} = \underline{\xi}_i \underline{b}_i$, $B = (b_1 b_2 b_3)$

Dann bilden die Schemata der partiellen Ableitung

$$(t_{ij\dots k,p})_B \quad i, j, \dots, k, p \in \{1, 2, 3\}$$

einen Tensor $(n+1)$ -Stufe

Fundamentalsatz der Feldtheorie:

Durch p -malige Differentiation eines Tensors wird dessen Stufe um p erhöht.