

Naturkonstanten

$c_0 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2,997924 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$	Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
$e = -1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Elementarladung des Elektrons
$h = 6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	Plancksches Wirkungsquantum
$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	Boltzmann-Konstante
$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	Ruhemasse des Elektrons
$\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$	Dielektrizitätskonstante
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$	Permeabilitätskonstante
$\mu_B = e h/(4\pi m_e) = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$	Bohrsches Magneton
$Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 376,73 \Omega$	Freiraumwellenwiderstand

Jürgen Richter, 17. Oktober 2002

	Zeitbereich	Frequenzbereich
Integralform:	$\oint_C \vec{H}(t) \cdot d\vec{\ell} = \int_A \vec{J}(t) \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{D}(t) \cdot d\vec{A}$ $\oint_C \vec{E}(t) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}$ $\oint_S \vec{D}(t) \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(t) dV$ $\oint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV \quad \text{Integralsatz von Gauß}$ $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} \quad \text{Integralsatz von Stokes}$	$\oint_C \vec{H}(\omega) \cdot d\vec{\ell} = \int_A \vec{J}(\omega) \cdot d\vec{A} + j\omega \int_A \vec{D}(\omega) \cdot d\vec{A}$ $\oint_C \vec{E}(\omega) \cdot d\vec{\ell} = -j\omega \int_A \vec{B}(\omega) \cdot d\vec{A}$ $\oint_S \vec{D}(\omega) \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\omega) dV$ $\oint_S \vec{B}(\omega) \cdot d\vec{S} = 0$
Differentielle Form:	$\nabla \times \vec{H}(t) = \vec{J}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t)$ $\nabla \times \vec{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t)$ $\nabla \cdot \vec{D}(t) = \rho(t)$ $\nabla \cdot \vec{B}(t) = 0$	$\nabla \times \vec{H}(\omega) = \vec{J}(\omega) + j\omega \cdot \vec{D}(\omega)$ $\nabla \times \vec{E}(\omega) = -j\omega \cdot \vec{B}(\omega)$ $\nabla \cdot \vec{D}(\omega) = \rho(\omega)$ $\nabla \cdot \vec{B}(\omega) = 0$
Randbedingungen:	$\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_1(t) - \vec{E}_2(t)) = \vec{0}$ $\vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1(t) - \vec{D}_2(t)) = \rho_F(t)$ $\vec{n}_{21} \times (\vec{H}_1(t) - \vec{H}_2(t)) = \vec{J}_F(t)$ $\vec{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1(t) - \vec{B}_2(t)) = 0$	$\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_1(\omega) - \vec{E}_2(\omega)) = \vec{0}$ $\vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1(\omega) - \vec{D}_2(\omega)) = \rho_F(\omega)$ $\vec{n}_{21} \times (\vec{H}_1(\omega) - \vec{H}_2(\omega)) = \vec{J}_F(\omega)$ $\vec{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1(\omega) - \vec{B}_2(\omega)) = 0$

Übungen zu Passive Bauelemente und deren HF-Verhalten
Aufgabe 1: Räumlich-zeitliche Darstellung von Vektorfeldern

LHFT
E 3

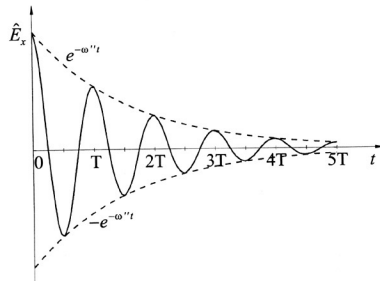
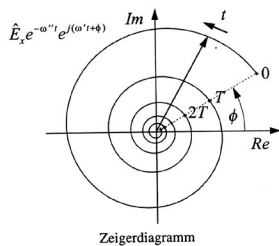
Was bedeutet eine komplexe Frequenz?

$$\omega = \omega' + j\omega''$$

$$\vec{E}(t) = \text{Re}\{\vec{E}(\omega) e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\vec{E}(\omega) e^{j(\omega' + j\omega'')t}\} = \text{Re}\{\vec{E}(\omega) e^{-\omega''t} e^{j\omega' t}\}$$

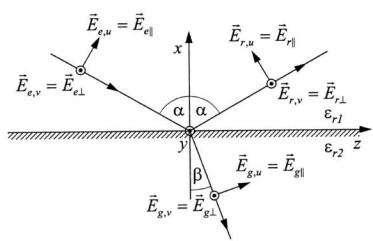
Sei $\vec{E}(\omega) = \vec{E} = \hat{E}_x \cdot e^{j\phi} \vec{e}_x$

$$\vec{E}(t) = \text{Re}\{\hat{E}_x e^{j\phi} e^{-\omega''t} e^{j\omega' t}\} \vec{e}_x = \hat{E}_x \cos(\omega' t + \phi) e^{-\omega''t}$$



Der Imaginärteil ω'' der komplexen Frequenz führt zu einem Abklingen der Schwingung (gedämpfte Schwingung mit der Frequenz ω').

Brechungsgesetz und Fresnelgesetze



Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n$$

Fresnelgesetze:

$$\frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{n \cos \alpha - \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}}{n \cos \alpha + \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}} \quad (1)$$

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (2)$$

$$\frac{E_{g\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2 \cos \alpha}{n \cos \alpha + \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}} \quad (3)$$

$$\frac{E_{g\perp}}{E_{e\perp}} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (4)$$

Brechzahl: $n_\nu = \sqrt{\epsilon_{r\nu}}$, $\nu = 1, 2$, $n = \frac{n_2}{n_1}$

Wellenwiderstand: $Z_\nu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\mu_{r\nu}}{\epsilon_{r\nu}}} = Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_{r\nu}}{\epsilon_{r\nu}}}$

für $\mu_r = 1$ gilt: $Z_\nu = Z_0 / \sqrt{\epsilon_{r\nu}} = Z_0 / n_\nu$

mit $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,7 \Omega$ (Freiraumwellenwiderstand)

Das Brechungsgesetz und die Fresnelgesetze gelten allgemein für $n > \sin \alpha$.

Sonderfälle:

1. Totalreflexion tritt für $n = \frac{n_2}{n_1} < 1$ auf wenn gilt: $\sin \alpha_T > n$

2. Brewsterwinkel: $E_{r\parallel} = 0$ für $\tan \alpha_B = n$ ($\alpha + \beta = 90^\circ$)

3. Senkrechter Einfall: $\alpha = 0 \rightarrow E_{r\perp} = E_{r\parallel} = E_r$ und $E_{g\perp} = E_{g\parallel} = E_g$

Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt für $\alpha = 0$:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{E_g}{E_e} = \frac{2}{n+1}$$

Phasenbeziehungen

Die Größen $E_{e\parallel}$, $E_{e\perp}$, $E_{r\parallel}$, $E_{r\perp}$, $E_{g\parallel}$ und $E_{g\perp}$ in den Fresnelschen Gesetzen sind alle reell, sodass die einzelnen Feldanteile je nach Vorzeichen der jeweiligen Quotienten gleich oder gegenphasig sind. Für die in der Zeichnung festgelegten Bezugsrichtungen gelten folgende Phasenbeziehungen:

(1) $\frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}} > 0 \rightarrow E_{r\parallel}$ und $E_{e\parallel}$ sind gleichphasig (Phasenprung bei der Reflexion!)

(2) $\frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}} > 0 \rightarrow E_{r\perp}$ und $E_{e\perp}$ sind gleichphasig

(3) $\frac{E_{g\parallel}}{E_{e\parallel}} > 0 \rightarrow E_{g\parallel}$ und $E_{e\parallel}$ sind gleichphasig

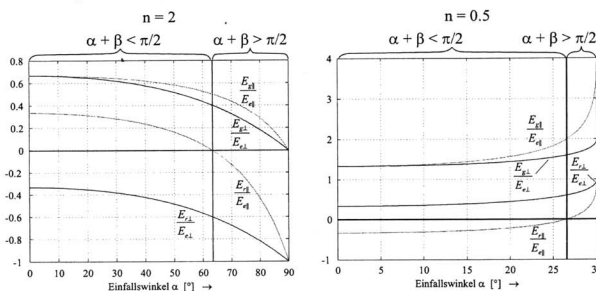
(4) $\frac{E_{g\perp}}{E_{e\perp}} > 0 \rightarrow E_{g\perp}$ und $E_{e\perp}$ sind gleichphasig

Dabei müssen folgende Fälle unterschieden werden:

1. $n > 1 \rightarrow \alpha > \beta$ a) $\alpha + \beta < \pi/2$
b) $\alpha + \beta > \pi/2$

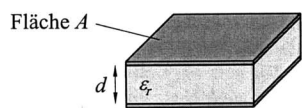
2. $n < 1 \rightarrow \alpha < \beta$ a) $\alpha + \beta < \pi/2$
b) $\alpha + \beta > \pi/2$

Aus den beiden folgenden Diagrammen ist zu erkennen, dass die gebrochene Welle immer gleichphasig zur einfallenden Welle ist, während die reflektierte Welle je nach Brechzahlunterschied und Einfallswinkel gleich- oder gegenphasig zur einfallenden Welle ist.



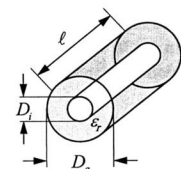
6.2.3 Kapazität einiger ausgewählter Strukturen

Plattenkondensator



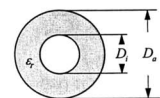
$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad (6.49)$$

Zylinderkondensator



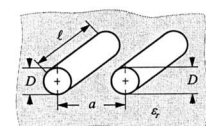
$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right)} \quad (6.50)$$

Kuglkondensator



$$C = 2\pi\epsilon \frac{D_a \cdot D_i}{D_a - D_i} \quad (6.51)$$

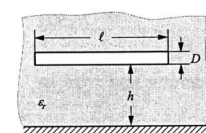
Paralleldrahtleitung



$$C = \frac{\epsilon\pi l}{\ln\left(\frac{a+a'}{D}\right)} \quad (6.52)$$

mit: $a' = \sqrt{a^2 - D^2}$

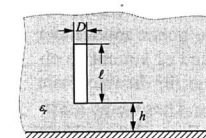
Horizontaler Draht über Erde



$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{4h}{D}\right)} \quad (6.53)$$

für $D \ll h$, $h \ll \ell$, $\ell \ll \lambda$

Vertikaler Draht über Erde

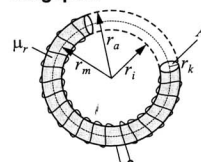


$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{2\ell}{D\sqrt{4h+\ell}}\right)} \quad (6.54)$$

für $D \ll \ell$, $\ell \ll \lambda$

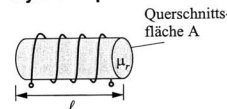
7.2.3 Induktivität einiger ausgewählter Strukturen

Ringspule



$$L = \mu \frac{N^2 A}{2\pi r_m} \quad (7.53)$$

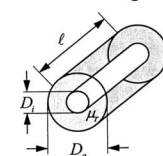
Zylinderspule



$$L = \mu \frac{N^2 A}{\ell} \quad (7.54)$$

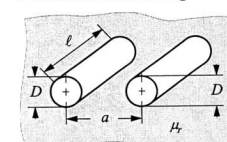
für $\ell \gg \sqrt{A}$

Koaxialleitung



$$L = \mu \frac{\ell}{2\pi} \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right) \quad (7.55)$$

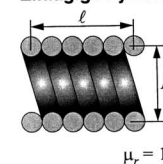
Paralleldrahtleitung



$$L = \mu \frac{\ell}{\pi} \ln\left(\frac{a}{D} + \sqrt{\left(\frac{a}{D}\right)^2 - 1}\right) \quad (7.56)$$

$\approx \mu \frac{\ell}{\pi} \ln\left(\frac{2a}{D}\right)$ für $a \gg D$

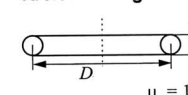
Einlagige Zylinderspule



$$L = \mu_0 N^2 D \frac{1,73}{1 + 2,2 \left(\frac{\ell}{D}\right)} \quad (7.57)$$

für $\ell > 0,4 D$

Kreiswindung



$$L = \mu_0 \frac{D}{2} \left[\ln\left(\frac{D}{d}\right) + 0,08 \right] \quad (7.58)$$

für $D \gg d$

Wie die Spannung ist auch der Gesamtstrom als Überlagerung einer vor- und einer rücklaufenden Stromwelle interpretierbar. Die physikalische Bedeutung des Minuszeichens vor dem 2. Term ist letztlich auf die Richtung des Energieflusses der reflektierten Welle in -z-Richtung zurückzuführen. Sowohl vor-, als auch rücklaufende Stromwellen sind mit der jeweiligen Spannungswelle über den Leitungswellenwiderstand Z_ℓ verknüpft. Es gilt also:

$$\frac{U^+}{I^+} = \frac{U^-}{I^-} = Z_\ell = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (9.57)$$

Es ist nun zweckmäßig, zur Vereinfachung den folgenden Ansatz zu machen:

$$\frac{R'}{\omega L'} = \sinh(\delta_R) \quad \text{und} \quad \frac{G'}{\omega C'} = \cosh(\delta_G). \quad (9.58)$$

Für das Dämpfungs- und Phasenmaß sowie für die Phasengeschwindigkeit v und den Wellenwiderstand Z_ℓ können dann die Gleichungen

$$\alpha = \left(\frac{R'}{2\sqrt{L'C'}} + \frac{G'}{2\sqrt{L'C'}} \right) \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{\delta_R - \delta_G}{2}\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} \cosh\left(\frac{\delta_R - \delta_G}{2}\right)$$

und

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{\delta_R - \delta_G}{2}\right)}$$

$$Z_\ell = \frac{\sqrt{L'/C'}}{\cosh(\delta_G)} \cdot \left[\cosh\left(\frac{\delta_R + \delta_G}{2}\right) - j \sinh\left(\frac{\delta_R - \delta_G}{2}\right) \right] \quad (9.62)$$

abgeleitet werden [1].

Diese Gleichungen stellen für allgemeine 2-Draht-Leitungen unter den gemachten Voraussetzungen die exakte Lösung dar. Vereinfachend kann für fast alle technischen Leitungen bei nicht zu niedrigen Frequenzen ($f \gtrsim 10$ kHz die Näherung $\cosh\left(\frac{\delta_R - \delta_G}{2}\right) \approx 1$ gemacht werden. Aus (9.59)–(9.62) folgt dann für **verlustarme Leitungen**:

$$\alpha \approx \frac{R'}{2\sqrt{L'C'}} + \frac{G'}{2\sqrt{L'C'}} \quad (9.63)$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{L'C'} \quad (9.64)$$

$$v \approx \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (9.65)$$

$$Z_\ell \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (9.66)$$

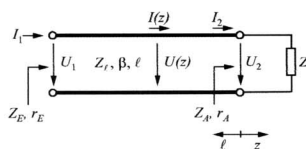
Wie wir sehen, sind nun das Phasenmaß β und die Phasengeschwindigkeit v näherungsweise unabhängig von den Verlusten. Der Leitungswellenwiderstand Z_ℓ wird reell, was bedeutet, dass für eine rein fortschreitende Welle Spannung und Strom in Phase sind.

Leitungsresonatoren

	Parallelresonanz	Serienresonanz
Eingangsimpedanz		$Z_E = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$
-admittanz	$Y_E = \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L}$ $\approx \frac{1}{R} + j\frac{2Q_0\Delta\omega}{\omega_0 R}$	$\approx R + j\frac{2RQ_0\Delta\omega}{\omega_0}$
Verlustleistung	$P_{Verl.} = \frac{1}{2} U ^2/R$	$P_{Verl.} = \frac{1}{2} I ^2 \cdot R$
gespeicherte magnet. Energie	$W_m = \frac{1}{4}\frac{ U ^2}{\omega^2 L}$	$W_m = \frac{1}{4} I ^2 \cdot L$
gespeicherte elektr. Energie	$W_e = \frac{1}{4} U ^2 \cdot C$	$W_e = \frac{1}{4} I ^2 \frac{1}{\omega^2 C}$
Resonanzfrequenz	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Eigengüte	$Q_0 = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$	$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$

Tabelle 10.1: Wichtige Ergebnisse für Parallel- und Serienschwingkreise

Bestimmung des Spannungs- und Stromverlaufs auf einer Leitung mit Hilfe des Smith-Diagramms



Spannung

$$U(z) = U^+(0) e^{-j\beta z} + U^-(0) e^{j\beta z}$$

$$z = -\ell \rightarrow U(\ell) = U^+(0) e^{j\beta\ell} + U^-(0) e^{-j\beta\ell} = U^+(0) e^{j\beta\ell} (1 + r_A e^{-j2\beta\ell})$$

$$\left| \frac{U(\ell)}{U^+(0)} \right| = |1 + r_A e^{-j2\beta\ell}| = |1 + r(\ell)|$$

$$\left| \frac{U}{U^+} \right|_{Min} = 1 - |r_A| \quad \left| \frac{U}{U^+} \right|_{Max} = 1 + |r_A| \rightarrow \frac{|U|_{Max}}{|U|_{Min}} = \frac{1 + |r_A|}{1 - |r_A|} = s$$

$$|r_A| = \frac{s-1}{s+1}$$

Einstimmung $s = 10 \rightarrow \frac{2}{4}$

Spannungsminimum im Abstand ℓ_{min} von Leitungsende:

$$r(\ell = \ell_{min}) = -|r_A| = -\frac{s-1}{s+1} \quad \text{und} \quad Z(\ell_{min}) = \frac{1}{s} \cdot Z_\ell \rightarrow m = \frac{1}{s} = \frac{Z(\ell_{min})}{Z_\ell} = z_{min}$$

s : Stehwellenverhältnis m : Anpassungsmaß

Strom

$$I(z) = I^+(0) e^{-j\beta z} - I^-(0) e^{j\beta z}$$

$$z = -\ell \rightarrow I(\ell) = I^+(0) e^{j\beta\ell} - I^-(0) e^{-j\beta\ell} = I^+(0) e^{j\beta\ell} (1 - r_A e^{-j2\beta\ell})$$

$$\left| \frac{I(\ell)}{I^+(0)} \right| = |1 - r_A e^{-j2\beta\ell}| = |1 - r(\ell)|$$

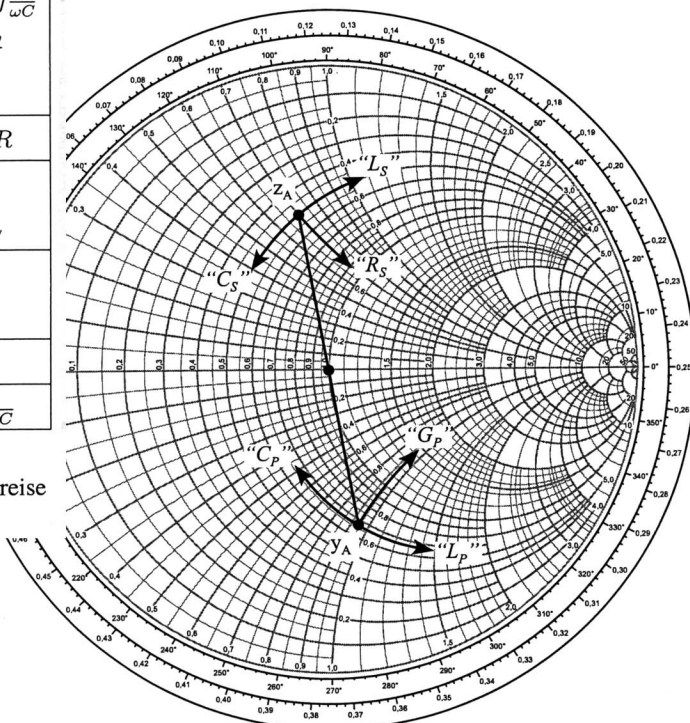
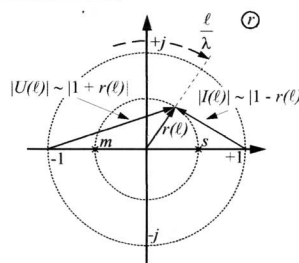


Abbildung 11.12: Transformation „konzentrierter“ Bauelemente im z- und y-Diagramm

H₁₀-Welle im Rechteckhohlleiter

Wegen der besonderen Bedeutung der H₁₀-Welle wollen wir für sie die wichtigsten Beziehungen, etwas umformuliert, nochmals zusammenstellen:

$$H_z = A_{10} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot e^{-j\beta z} \quad (12.129)$$

$$E_y = -jZ_F \cdot w \cdot A_{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot e^{-j\beta z} \quad (12.130)$$

$$H_x = j\sqrt{w^2 - 1} \cdot A_{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot e^{-j\beta z} \quad (12.131)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0 \quad (12.132)$$

$$q_{H10} = \frac{\pi}{a} \quad ; \quad f_{cH10} = \frac{v}{2a} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot 2a} \quad (12.133)$$

$$\beta_{H10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (12.134)$$

$$\frac{\lambda_{H10}}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot \beta_{H10}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad \text{mit } \lambda = \frac{c_0}{f \cdot \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (12.135)$$

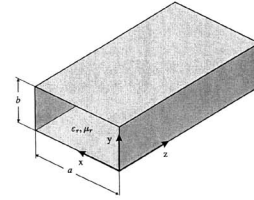
$$Z_{FH10} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta_{H10}} = Z_F \cdot \frac{\lambda_{H10}}{\lambda} \quad (12.136)$$

Wie üblich gilt auch bei obigen Gleichungen $w = f/f_{cH10}$ und $Z_F = Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Zur besseren Veranschaulichung des Feldzustands der betrachteten Welle ist dieser für eine sich in +z-Richtung ausbreitende, rein fortschreitende Welle in Abbildung 12.10 perspektivisch ausschnittsweise dargestellt. Aus dieser Darstellung ist auch der an der Innenseite der Leiteroberflächen fließende Strom ersichtlich. Bekanntlich ist die Flächenstromdichte \vec{J}_F im Metall mit der tangentialen Magnetfeldstärke an der Oberfläche verknüpft gemäß $\vec{J}_F = \vec{H} \times \vec{n}$, mit \vec{n} dem Normalen-Einheitsvektor, der vom Dielektrikum auf die Metalloberfläche zeigt. Diese Flächenstromdichte ist also betrag- und dimensionsgleich mit dem an dieser Stelle vorzufindenden (tangentialen) Magnetfeld und steht senkrecht auf diesem.

H₁₀-Welle im Rechteckhohlleiter

Geometrie und Koordinatensystem:



Feldstärken:

$$H_z = A_{10} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -jZ_F \cdot w \cdot A_{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j\sqrt{w^2 - 1} \cdot A_{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

Eigenwert und Grenzfrequenz:

$$q_{H10} = \frac{\pi}{a} \quad ; \quad f_{cH10} = \frac{v}{2a} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot 2a}$$

Phasenmaß und Hohlleiterwellenlänge:

$$\beta_{H10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\frac{\lambda_{H10}}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot \beta_{H10}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad \text{mit } \lambda = \frac{c_0}{f \cdot \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Feldwellenwiderstand:

$$Z_{FH10} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta_{H10}} = Z_F \cdot \frac{\lambda_{H10}}{\lambda}$$

Wie üblich gilt auch bei obigen Gleichungen $w = f/f_{cH10}$ und $Z_F = Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Wirkleistung der vorlaufenden Welle:

$$P_p = \frac{ab}{4} \cdot \frac{1}{Z_{FH10}} \cdot |E_y(x=a/2)|^2 = \frac{ab}{4} \cdot Z_{FH10} \cdot |H_x(x=a/2)|^2$$

genormter Betriebsfrequenzbereich: für $a/b \approx 2$:

$$1,25f_c \leq f \leq 1,9f_c$$

H_{mn} – Feldtyp

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$q_H = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$f_c = \frac{c_0}{2\pi \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \cdot q_H$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{q_H^2 - k^2}$$

$$Z_{FH} = \Gamma_H + j\chi_H = j\frac{\omega \mu}{\gamma}$$

$$\alpha = q_H \cdot \sqrt{1 - w^2} \quad \text{für } w < 1$$

$$\chi_H = Z_F \cdot \frac{w}{\sqrt{1 - w^2}} \quad \text{für } w < 1$$

$$\text{mit } w = f/f_c; Z_F = Z_0 \cdot \sqrt{\mu_r/\epsilon_r}; Z_0 = 120\pi \Omega$$

$$\beta = q_H \cdot \sqrt{w^2 - 1} \quad \text{für } w > 1$$

$$\lambda_H = 2\pi/\beta \quad \text{für } w > 1$$

$$\Gamma_H = Z_F \cdot \frac{w}{\sqrt{w^2 - 1}} \quad \text{für } w > 1$$

$$E_z = 0$$

$$H_z = A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$E_x = j\frac{\omega \mu}{q_H^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -j\frac{\omega \mu}{q_H^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j\frac{\beta}{q_H^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_y = j\frac{\beta}{q_H^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\alpha_D = \frac{k^2}{2\beta} \cdot \tan \delta_\epsilon$$

E_{mn} – Feldtyp

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$q_E = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$f_c = \frac{c_0}{2\pi \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \cdot q_E$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{q_E^2 - k^2}$$

$$Z_{FE} = \Gamma_E + j\chi_E = -j\frac{\gamma}{\omega \epsilon}$$

$$\alpha = q_E \cdot \sqrt{1 - w^2} \quad \text{für } w < 1$$

$$\chi_E = -Z_F \cdot \frac{\sqrt{1 - w^2}}{w} \quad \text{für } w < 1$$

$$\beta = q_E \cdot \sqrt{w^2 - 1} \quad \text{für } w > 1$$

$$\lambda_E = \lambda_H = 2\pi/\beta \quad \text{für } w > 1$$

$$\Gamma_E = Z_F \cdot \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w} \quad \text{für } w > 1$$

$$E_z = B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_z = 0$$

$$E_x = -j\frac{\beta}{q_E^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot B_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -j\frac{\beta}{q_E^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j\frac{\omega \epsilon}{q_E^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_y = -j\frac{\omega \epsilon}{q_E^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot B_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\alpha_D = \frac{k^2}{2\beta} \cdot \tan \delta_\epsilon$$