2.4 Linearisierung um den Betriebspunkt

2.4.1 Betriebspunkt (oder Arbeitspunkt) eines Systems
= stationäre Systemzustand, bei dem die Ausgangsgröße ihren Sollwert annimmt.

Ein stationärer Zustand (eingeschwungener Zustand, Ruhezustand, -lage) eines dynamischen Systems ist dabei ein Zustand, in dem alle zeitveränderlichen Systemgrößen konstant und damit ihre Ableitungen null sind. =>Zur Bestimmung des stationären Zustandes in den Üfen s=0 setzen, mit einer Ausnahme: beim I-Glied (mit ÜF K/s) muss die Eingangsgröße null sein, damit ein stationärer Zustand angenommen wird. Zur Betriebspunktbestimmung muss man dann noch die Ausgangsgröße gleich ihrem Sollwert setzen.

Im Weiteren: Kennzeichnung der Betriebspunktwerte durch den Index B.

Beispiel: Geschwindigkeitsregelung (siehe Beiblatt13)

- Gewünschter Betriebspunkt: Konstantfahrt auf ebener Strecke ($\alpha_{StB} = 0^o$) mit $v_{soll} = v_B = 120\,{km}/{h} = 33{,}3\,{m}/{s}$ bei $M_{NB} = 4Nm$

- Gesucht: Erforderliches Motormoment M_{MB} und zugehörige Drosselklappenstellung α_{DKB}

Im Betriebspunkt muss gelten:

$u_{StB} = 0$ **(1)** sowie $F_{AB} - F_{HB} - F_{RB} - F_{LB} = 0$ **(2)**,
da Eingangsgrößen von I-Gliedern.

Dabei gilt: $F_{AB} = \frac{1}{r} \cdot i \cdot \eta \cdot (M_{MB} - M_{NB})$, $F_{HB} = 0$ wegen $\alpha_{StB} = 0^o$,

$F_{RB} = f_R \cdot m \cdot g$, $F_{LB} = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_B{}^2$

Damit aus **(2)**: $M_{MB} = \frac{r}{i\eta} \cdot (f_R \cdot m \cdot g + c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_B{}^2) + M_{NB} = 63Nm$

Parameter auf Beiblatt 12/1 + 12/2

Weiterhin muss gelten: $M_{MB} = f_M \cdot (\tilde{\alpha}_{DKB}, n_{MB}) \overset{!}{=} 63Nm$,

wobei $n_{MB} = \frac{60 \cdot i}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot v_B = 4240\,{U}/{\min}$ und $\tilde{\alpha}_{DKB} = \alpha_{DKB}$ (wegen s=0 in den ÜFen).

=> $f_M\left(\alpha_{DKB}, 4240\,{U}/{\min}\right) = 63Nm$ **(3)** $\xrightarrow{\text{Motorkennfeld (Beiblatt 12/3)}}$ $\alpha_{DKB} = 20\%$

2.4.2 Durchführung der Linearisierung um den Betriebspunkt

1. Schritt: Übergang von den absoluten Werten x(t) zu den Abweichungen Δ x(t) vom Betriebspunkt x_B : $x(t) = x_B + \Delta x(t)$

Was hat das zur Folge?

- Beispiel für lineare Üger:

  P-T_1-Glied mit $y(t) = T \cdot \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $Y(s) = \dfrac{K}{1+Ts} \cdot U(s)$

  Übergang zu den Abweichungen $\Downarrow$

  $y(t) = y_B + \Delta y(t)$ => $\dot{y}(t) = \Delta\dot{y}(t)$ wobei

  $u(t) = u_B + \Delta u(t)$ $y_B = K \cdot u_B$

  $\cancel{y_B} + \Delta y(t) + T \cdot \Delta\dot{y}(t) = \cancel{K \cdot u_B} + K \cdot \Delta u(t)$

  $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $Y(s) = \dfrac{K}{1+Ts} \cdot \Delta U(s)$

Also: Lineare Üger bleiben unverändert!

Weiterhin: Anfangswerte und sonstige feste Größen fallen weg, da Abweichungen hiervon =0.

- Beispiel für nichtlineare Üger:

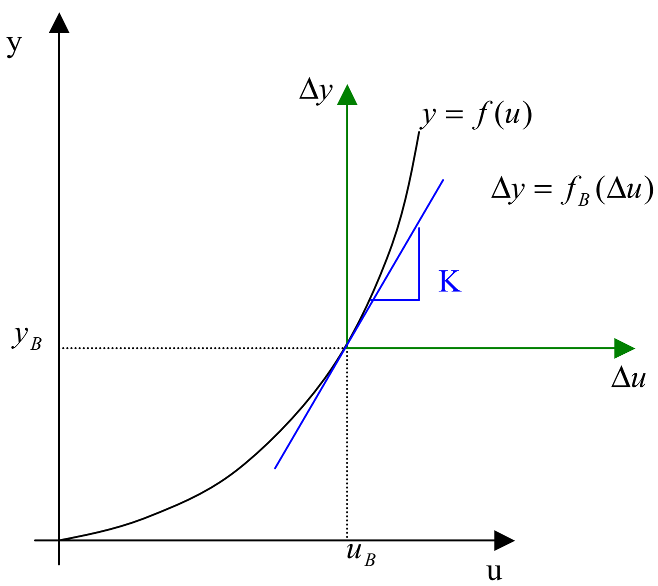
  Kennlinienglied mit $y(t) = f\{u(t)\}$

  Übergang zu den Abweichungen $\Downarrow$

  $y(t) = y_B + \Delta y(t)$ wobei

  $u(t) = u_B + \Delta u(t)$ $y_B = f(u_B)$

  $y_B = \Delta y(t) = f\{u_B + \Delta u(t)\}$=> $\Delta y(t) = f\{u_B + \Delta u(t)\} - f\{u_B\} = f_B\{\Delta u(t)\}$



Koordinatenverschiebung

Kennlinie wird durch Tangente im Betriebspunkt ersetzt.

2. Schritt: Annahme kleiner Abweichungen und lineare Approximation der nichtlinearen Beziehungen durch Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied:

$$\Delta y(t) = f_B(0) + f'_B(0)\cdot \Delta u(t) + \cancel{R(\Delta u^2)} \xrightarrow{\text{Linearisierung}} \Delta y(t) = K \cdot \Delta u(t) \text{ mit } K = f'_B(0) = \frac{df}{du}|u_B$$

Also: Nichtlineare Üger gehen (für kleine Abweichungen) in P-Glieder über.

Diese Linearisierung gilt <u>nur</u> in einer nicht zu großen Umgebung des Betriebspunktes.

Linearisierung der Geschwindigkeitsregelung (siehe Beiblatt 13)

1. Übergang zu den Betriebspunktabweichungen
   ⇨ lineare Blöcke unverändert und $F_R = f_R \cdot m \cdot g$ fällt weg, da konstante Größe.

2. Linearisierung der nichtlinearen Blöcke:
   - $F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha_{St} \longrightarrow \Delta F_H = m \cdot g \cdot \cos\alpha_{StB} \cdot \Delta\alpha_{St} = m \cdot g \cdot \Delta\alpha_{St}$
   - $F_L = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \longrightarrow \Delta F_L = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot 2 \cdot v_B \cdot \Delta v = c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v_B \cdot \Delta v$
   - $M_M = f_M(\tilde{\alpha}_{DK}, n_M) \longrightarrow \Delta M_M = K_\alpha \cdot \Delta\tilde{\alpha}_{DK} \overset{-}{+} K_n \cdot \Delta n_M$

wobei

$$K_\alpha = \frac{\partial f_M}{\partial \tilde{\alpha}_{DK}}|_B \approx \frac{f_M(30\%, n_{MB}) - f_M(10\%, n_{MB})}{20\%} = \frac{13Nm - (-10Nm)}{20\%} = 7{,}3\, Nm/\%$$

$$K_n = -\frac{\partial f_M}{\partial n_M} = -\frac{-50Nm}{5500\frac{U}{\min}} = \pm 9{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{U/\min}$$

(damit $K_n > 0$)