



Vorlesung „Regelungstechnik“

Übungsblatt 13

Übungsaufgabe 13.1

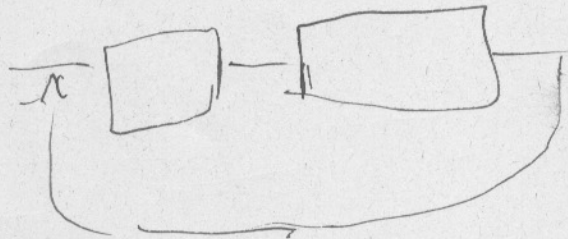
Gegeben sei die Regelstrecke

$$F(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.5s)},$$

die mit einem PI-Regler gemäß

$$F_R(s) = K_R \frac{1 + T_R s}{s}$$

geregelt werden soll, der zeitdiskret zu realisieren ist.



- Wählen Sie die Zählerzeitkonstante T_R des PI-Reglers so, dass die größte Zeitkonstante der Strecke kompensiert wird. Für welche Reglerverstärkung K_R besitzt der Regelkreis eine Dämpfung von $D = 1$?
- Bestimmen Sie die Zeitkonstante T der Regelung. Wie muss die Abtastzeit T_A des Regelalgorithmus gewählt werden, damit $T_A = 0.1T$ gilt.
- Diskretisieren Sie den PI-Regler aus Teilaufgabe a), indem Sie die Integration durch die
 - Rechteckregel
 - Trapezregelapproximieren. Geben Sie die beiden resultierenden Regelalgorithmen in rekursiver Form an. Sind die beiden erhaltenen zeitdiskreten Regelalgorithmen von der Taktzeit T_A abhängig?

Übungsaufgabe 13.2

Die Regelstrecke

$$F(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

soll mit einem PD- T_1 -Regler

$$F_R(s) = K_R \frac{1 + T_R s}{1 + \tau s}, \quad \tau = 0.1 T_R,$$

geregelt werden, wobei der Regler zeitdiskret mit der Abtastzeit $T_A = 0.01$ zu realisieren ist.

- Wählen Sie die Zählerzeitkonstante T_R des PD- T_1 -Reglers so, dass die größte Zeitkonstante der Strecke kompensiert wird. Für welche Reglerverstärkung K_R besitzt der Regelkreis eine Zeitkonstante T , für die $T = 10T_A$ gilt? Welche Dämpfung hat dann der Regelkreis?
- Diskretisieren Sie den PD- T_1 -Regler aus Teilaufgabe a), indem Sie die Integration durch die Rechteckregel approximieren. Geben Sie den Regelalgorithmus in rekursiver Form an.



Übungsaufgabe 13.1

$$a) \quad F_0(s) = K_R \frac{1 + T_R s}{s} \quad \frac{1}{(1 + 0,5s)} = \frac{K_R}{s(1 + 0,5s)}$$

$$F_W(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{T_0 s}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_R} s + \frac{0,5}{K_R} s^2} = \frac{1}{1 + 2Ts + T^2 s^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{K_R^2} = 4T^2 = 4 \frac{0,5}{K_R} \quad \hookrightarrow K_R = \frac{1}{2}$$

$$b) \quad T = \frac{\sqrt{0,5}}{K_R} = 1 \quad \hookrightarrow T_A = 0,1T = 0,1$$

$$c) \quad \text{PI-Regler: } U(s) = K_R \frac{1 + T_R s}{s} E(s)$$

$$= \underbrace{K_R T_R}_{\frac{1}{T_N}} \left(1 + \frac{1}{T_R s} \right) E(s)$$

$$\circ$$

$$u(t) = K_R \left[e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$



Diskretisierung des PI-Reglers:

$$u(t) = K_R \left[e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

• Zeitdiskretisierung

$$u(kT_A) = K_R \left[e(kT_A) + \frac{1}{T_N} \int_0^{kT_A} e(\tau) d\tau \right]$$

Problem: zur Bildung des Integrals müssen alle bisher eingelesenen Werte $e(nT_A)$, $n = 0, 1, \dots, k$ abgespeichert werden

Abhilfe: Verwendung eines rekursiven Algorithmus, der nur vorhergehende Werte verwendet

$$u(kT_A) = K_R \left[e(kT_A) + \frac{1}{T_N} \int_0^{kT_A} e(\tau) d\tau \right] + K_R \frac{1}{T_N} \int_0^{(k-1)T_A} e(\tau) d\tau$$

mit

$$u((k-1)T_A) = K_R \left[e((k-1)T_A) + \frac{1}{T_N} \int_0^{(k-1)T_A} e(\tau) d\tau \right]$$

$$\hookrightarrow K_R \frac{1}{T_N} \int_0^{(k-1)T_A} e(\tau) d\tau = u((k-1)T_A) - K_R e((k-1)T_A)$$

eingesetzt

$$u(kT_A) = u((k-1)T_A) + K_R (e(kT_A) - e((k-1)T_A))$$

$$+ K_R \frac{1}{T_N} \int_0^{kT_A} e(\tau) d\tau$$



Vorlesung „Regelungstechnik“

Lösung Übungsblatt 13

z-Übertragungsfunktionen der Regler

- PI-Algorithmus mit Rechteckregel

$$(1 - z^{-1}) U(z) = k_R \left[1 + \left(\frac{T_A}{T_N} - 1 \right) z^{-1} \right] E(z)$$

$$\rightarrow F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{k_R \left[1 + \left(\frac{T_A}{T_N} - 1 \right) z^{-1} \right]}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{K_R T_R \left[1 + \left(\frac{T_A}{T_R} - 1 \right) z^{-1} \right]}{1 - z^{-1}}$$

- PI-Algorithmus mit Trapezregel

$$(1 - z^{-1}) U(z) = k_R \left[1 + \frac{T_A}{2T_N} + \left(\frac{T_A}{2T_N} - 1 \right) z^{-1} \right] E(z)$$

$$\rightarrow F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{k_R \left[1 + \frac{T_A}{2T_N} + \left(\frac{T_A}{2T_N} - 1 \right) z^{-1} \right]}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{K_R T_R \left[1 + \frac{T_A}{2T_R} + \left(\frac{T_A}{2T_R} - 1 \right) z^{-1} \right]}{1 - z^{-1}}$$

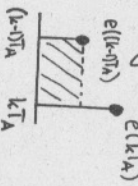


Vorlesung „Regelungstechnik“

Lösung Übungsblatt 13

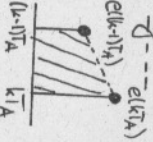
- Approximation des Integrals

Rechteckregel:



$$\int_{(k-1)T_A}^{kT_A} e(\tau) d\tau \approx T_A e(kT_A)$$

Trapezregel:



$$\int_{(k-1)T_A}^{kT_A} e(\tau) d\tau \approx \frac{T_A}{2} (e((k-1)T_A) + e(kT_A))$$

Approximation in Zeitdiskretisierung eingesetzt liefert
zeitdiskreten Regelalgorithmus

PI-Algorithmus mit Rechteckregel:

$$u(kT_A) = u((k-1)T_A) + k_T [e(kT_A) + (\frac{T_A}{T_N} - 1) e((k-1)T_A)]$$

PI-Algorithmus mit Trapezregel:

$$u(kT_A) = u((k-1)T_A) + k_T [(1 + \frac{T_A}{2T_N}) e(kT_A) + (\frac{T_A}{2T_N} - 1) e((k-1)T_A)]$$

Beide Regelalgorithmen sind von der Abtastzeit T_A
abhängig → bei Änderung der Abtastzeit T_A müssen
auch die Reglerparameter neu berechnet
werden

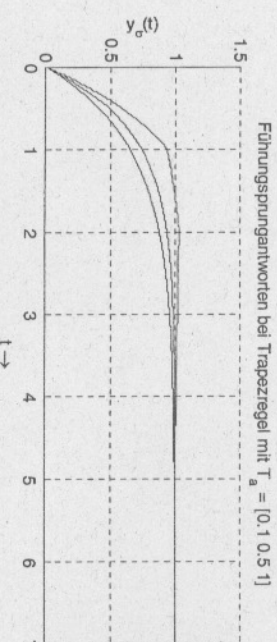
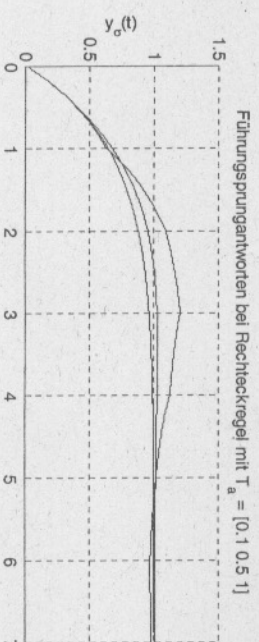
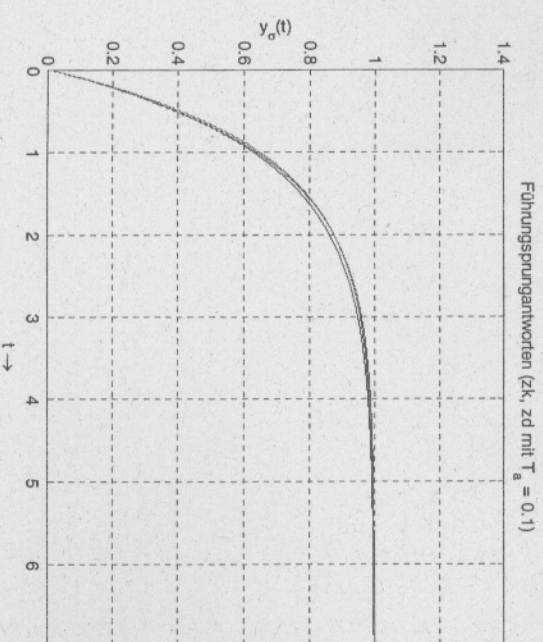
-3-

WS 2001/2002



Vorlesung „Regelungstechnik“

Beiblatt zu Übungsaufgabe 13.1



WS 2002/2003



Übungsaufgabe 13.2

$$a) F_0(s) = K_R \frac{1+T_R s}{1+\tau s} = \frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{K_R}{s(1+0,1s)}$$

$$T = 10 \cdot T_A = 0,1$$

$$F_W(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{T_0 s}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_R} s + \frac{0,1}{K_R} s^2} = \frac{1}{1 + 0,2 D s + 0,01 s^2}$$

$$\rightarrow \frac{0,1}{K_R} = 0,01 \rightarrow K_R = 10$$

$$0,2 D = \frac{1}{K_R} = 0,1 \rightarrow D = \frac{1}{2}$$

b) PD-T₁-Regler: $U(s) = K_R \frac{1+T_R s}{1+\tau s} E(s)$

$$(1+\tau s) U(s) = K_R (1+T_R s) E(s) \quad | \cdot \frac{1}{s}$$

$$\left(\frac{1}{s} + \tau\right) U(s) = K_R \left(\frac{1}{s} + T_R\right) E(s)$$

$$\int_0^t u(\tau) d\tau + \tau u(t) = K_R \left(\int_0^t e(\tau) d\tau + T_R e(t) \right)$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau + \frac{K_R T_R}{\tau} e(t)$$



Diskretisierung des PD-T₁-Reglers

• Zeitdiskretisierung

$$u(kT_A) = \frac{1}{T} \int_0^{kT_A} K_R e(\tau) - u(\tau) d\tau + \frac{K_R T_R}{T} e(kT_A)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{(k-1)T_A} (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau + \frac{1}{T} \int_{(k-1)T_A}^{kT_A} (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau + \frac{K_R T_R}{T} e(kT_A)$$

mit

$$u((k-1)T_A) = \frac{1}{T} \int_0^{(k-1)T_A} (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau + \frac{K_R T_R}{T} e((k-1)T_A)$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^{(k-1)T_A} (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau = u((k-1)T_A) - \frac{K_R T_R}{T} e((k-1)T_A)$$

eingesetzt

$$u(kT_A) = u((k-1)T_A) + \frac{1}{T} \int_{(k-1)T_A}^{kT_A} (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau + \frac{K_R T_R}{T} (e(kT_A) - e((k-1)T_A))$$

• Approximation des Integrals mittels Rechteckregel

$$\int_{(k-1)T_A}^{kT_A} (K_R e(\tau) - u(\tau)) d\tau \approx T_A (K_R e((k-1)T_A) - u((k-1)T_A))$$



Approximation in Zeitdiskretisierung eingesetzt liefert

PD-T_A-Algorithmus mit Rechteckregel

$$u(kT_A) = \left(1 - \frac{T_A}{T}\right) u((k-1)T_A) + \frac{K_R T_R}{T} e(kT_A) + \frac{K_R (T_A - T_R)}{T} e((k-1)T_A)$$

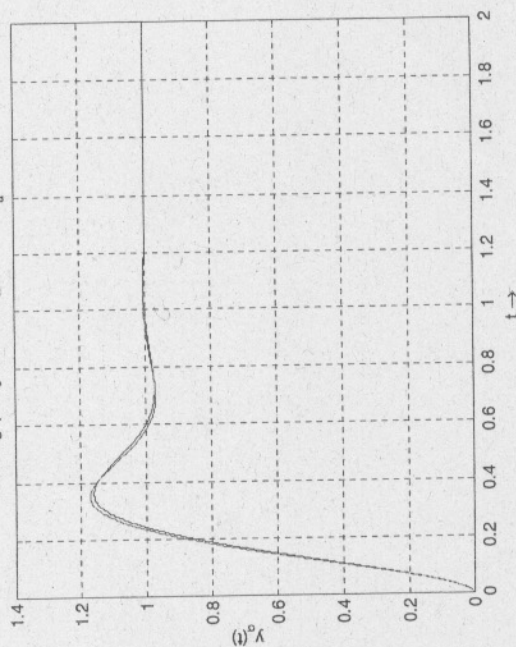
z-Übertragungsfunktion

$$\left(1 + \left(\frac{T_A}{T} - 1\right) z^{-1}\right) U(z) = \left(\frac{K_R T_R}{T} + \frac{K_R (T_A - T_R)}{T} z^{-1}\right) E(z)$$

$$\rightarrow F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\frac{K_R T_R}{T} + K_R \frac{T_A - T_R}{T} z^{-1}}{1 + \left(\frac{T_A}{T} - 1\right) z^{-1}}$$



Führungsprungantworten (zk, zd mit $T_s = 0.01$)



Führungsprungantworten mit $T_s = [0.01 \ 0.05 \ 0.1]$

